

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ SPÉCIALISÉE EN DATA SCIENCE

#### Formation de motifs de Turing dans des systèmes de réaction-diffusion sur des réseaux

Jamoulle, Marine

*Award date:*  
2019

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**FORMATION DE MOTIFS DE TURING DANS DES SYSTÈMES DE RÉACTION-  
DIFFUSION SUR DES RÉSEAUX**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en mathématiques à finalité spécialisé en data science**

Marine JAMOULLE

Août 2019



# Remerciements

En préambule de ce mémoire, je tiens à adresser mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidée à le réaliser.

Tout d'abord, je tiens à remercier sincèrement le professeur Timoteo Carletti, promoteur de ce mémoire, pour son temps, sa patience et ses conseils. Il m'a fourni les sources nécessaires à la compréhension de mon sujet. Son écoute attentive, son regard critique face à mon travail et ses explications m'ont permis d'y voir plus clair et d'avancer dans mon ouvrage. Depuis le choix du sujet et jusqu'aux corrections de dernière minute, j'ai pu compter sur lui pour toute question ou difficulté.

J'adresse mes remerciements aux membres du jury pour avoir accepté la tâche de lire et évaluer mon travail.

Je remercie également tous les professeurs du Département de Mathématique, qui m'ont suivie tout au long de mes études et m'ont transmis leur connaissance et leur passion des mathématiques. Plus généralement, je suis reconnaissante envers tous les membres du personnel de l'UNamur. C'est grâce à eux que je sors épanouie et grandie de ces cinq années d'études, à la fois sur le plan professionnel et sur le plan personnel. Toutes ces personnes ont contribué au bon déroulement de mes études et en ont fait une expérience réellement enrichissante. Merci aussi à tous les étudiants avec qui j'ai pu travailler depuis la première année, pour les bons moments que nous avons vécus et les encouragements qu'ils m'ont apportés.

J'ai une pensée particulière pour mon papa qui, malheureusement, ne sera pas témoin de l'accomplissement de ces cinq années. Je ne remercierai jamais assez ma famille et mes amis qui ont su me soutenir durant la rédaction de mon mémoire mais aussi durant cet événement difficile. Grâce à eux, je n'ai jamais perdu le courage ni l'envie de continuer.

Enfin, je remercie en particulier Arnaud Roisin pour sa relecture attentive et ses conseils pertinents, ainsi que tous mes amis proches pour leur soutien sans faille, leurs encouragements et leur amitié tout simplement.

Un tout grand merci à tous.

*Marine Jamouille*





# Résumé

Dans la nature, de nombreux organismes possèdent des motifs pigmentaires. L'étude de l'émergence de ces motifs constitue la base de la réflexion sur laquelle se fonde ce travail. Notre but est de développer la théorie des instabilités de Turing, introduite en 1952, en travaillant avec des systèmes de réaction-diffusion sur des réseaux. Nous commençons par développer la théorie en domaine continu pour pouvoir la transposer au domaine discret. Pour chaque type d'espace, nous déterminons les conditions sous lesquelles apparaissent des motifs. Nous illustrons les concepts sur un système de réaction-diffusion et nous effectuons différentes expérimentations afin de confirmer nos résultats.

## Mots-clés :

Modèles de réaction-diffusion, instabilités de Turing, réseaux.

# Abstract

In nature, many organisms display pigment patterns. The study of the emergence of these patterns forms the basis of the reflection on which this work is based. Our aim is to develop the theory of Turing instabilities, introduced in 1952, by working with reaction-diffusion systems on networks. We start by developing the theory in continuous domain to be able to transpose it to the discrete domain. For each type of space, we determine the conditions under which patterns appear. We illustrate the concepts on a reaction-diffusion system and we carry out different experiments to confirm our results.

## Mots-clés :

Reaction-diffusion models, Turing instabilities, networks.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Diffusion en domaine continu</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction de la problématique . . . . .	11
1.2 Étude sans diffusion . . . . .	13
1.3 Présentation d'un exemple . . . . .	14
1.4 Étude avec diffusion . . . . .	17
1.5 Application à un exemple . . . . .	20
<b>2 Diffusion sur un réseau</b>	<b>23</b>
2.1 Rappels de théorie des graphes . . . . .	23
2.2 Création de graphes . . . . .	25
2.3 Modélisation du système . . . . .	28
2.4 Diffusion simple . . . . .	31
2.4.1 Application à un exemple . . . . .	33
2.5 Diffusion croisée . . . . .	38
2.5.1 Application à un exemple . . . . .	38
<b>3 Diffusion dépendant des concentrations</b>	<b>45</b>
3.1 Réécriture du système . . . . .	45
3.2 Application à un exemple . . . . .	46
<b>Conclusion</b>	<b>51</b>



# Introduction

Comment expliquer la formation de motifs sur le pelage des animaux, sur les feuilles des plantes ? Peut-elle être modélisée, anticipée, provoquée ? L'émergence spontanée de motifs ou de formes régulières est une manifestation de l'organisation dans la nature. En comprendre les mécanismes a longtemps été et est toujours un des objectifs des mathématiques et de la science en général. Il s'agit d'étudier la morphogenèse, c'est-à-dire comprendre les processus qui déterminent la structure des organismes vivants lors de leur développement depuis le stade embryonnaire. C'est dans son article de 1952, *The Chemical Basis of Morphogenesis* [1], qu'Alan Turing propose un modèle mathématique afin d'expliquer comment la formation de rayures ou de taches sur le pelage des animaux peut survenir depuis un équilibre homogène. Dans l'idée d'étudier la formation des différents motifs que l'on peut trouver sur les animaux, il s'intéresse aux interactions des substances chimiques responsables de la pigmentation. Il modélise le comportement de ces molécules à la fois du point de vue de leurs réactions locales et de leur propagation dans l'espace. Un système de réaction-diffusion peut posséder un équilibre homogène qui, après perturbation, peut avoir une solution instable hétérogène, ce qui crée un motif. Dans son article, Turing considère plusieurs types de topologies, réalistes biologiquement ou non, et différencie les types de motifs pouvant être observés tout en isolant les conditions pour l'émergence de ces motifs. Ces conditions s'appellent encore aujourd'hui des conditions d'instabilité de Turing. Cette théorie forme la base de ce travail.

Dans le premier chapitre, nous étudions brièvement la formation de motifs en domaine continu en nous basant sur le livre *Mathematical Biology* [2] de James D. Murray, qui se base sur le travail de Turing. Nous définissons les concepts fondamentaux intervenant dans la modélisation d'un système de réaction-diffusion et nous nous concentrons sur la détermination des conditions permettant l'apparition de motifs. Nous introduisons un exemple qui servira de fil rouge au travail et sur lequel nous effectuons les différentes expérimentations.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la formation dans un domaine non plus continu mais discret, c'est-à-dire un réseau. Nous détaillons les étapes à suivre pour représenter un système de réaction-diffusion discret, en nous basant sur différentes définitions relatives à la théorie des graphes. Nous dérivons les conditions d'instabilité de Turing pour ce

type de systèmes. Ensuite, nous effectuons quelques expériences sur notre exemple, en nous penchant sur deux cas possibles de diffusion.

Le dernier chapitre de ce travail est dédié à l'étude des instabilités de Turing, toujours sur des réseaux, mais avec la possibilité que la diffusion se fasse en fonction des concentrations déjà présentes sur le réseau. Pour ce faire, nous réécrivons le modèle en tenant compte de la dépendance de la diffusion par rapport aux concentrations. Nous introduisons des fonctions possibles et nous les appliquons à notre exemple.

Toutes les figures présentes dans ce travail ont été générées à l'aide du logiciel Matlab [8], sur base de codes présents dans la documentation [9] ou fournis par le professeur Timoteo Carletti, promoteur de ce mémoire. Les différents codes utilisés ne sont pas placés en annexe mais peuvent être fournis sur demande à l'adresse [marine.jamouille@student.unamur.com](mailto:marine.jamouille@student.unamur.com).

# Chapitre 1

## Diffusion en domaine continu

Il existe une branche de la biologie, appelée la morphogenèse, qui étudie les mécanismes intervenant dans le développement des organismes vivants. Cette discipline aspire, entre autres, à expliquer la formation des motifs sur la peau des animaux, les ailes des insectes ou encore les feuilles des plantes. L'une des théories apportant des réponses à cette question est la théorie des instabilités de Turing. Dans ce chapitre, nous introduisons la problématique des instabilités de Turing dans un système de réaction-diffusion. Nous commençons par définir un système de réaction-diffusion de façon générale en domaine continu. Nous particularisons ce système à deux espèces afin d'y appliquer un exemple illustratif tiré du livre de référence [2]. Nous procédons ensuite à l'étude classique de la stabilité homogène et non-homogène du système pour en dériver des conditions amenant à des instabilités de Turing. En parallèle, nous appliquons les résultats découverts à un exemple de deux espèces, le Brusselator, que nous aurons au préalable défini.

### 1.1 Introduction de la problématique

Les systèmes de réaction-diffusion sont des modèles mathématiques représentant les concentrations de différentes espèces, lesquelles sont influencées par leurs interactions locales (on parle de réaction) et leur capacité à se déplacer dans l'espace (on parle de diffusion). Soit  $X(x, t)$  la concentration d'une espèce qui dépend de l'espace et du temps. Le terme "espèce" est ici utilisé pour dénoter un agent chimique, une espèce animale ou autre. Le système de réaction-diffusion est défini par

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) + D\nabla^2 X$$

où  $F$  est la fonction décrivant la réaction et  $D$  le coefficient de diffusion. Le symbole  $\nabla^2$  désigne l'opérateur de Laplace.

**Définition 1.1.1.** *L'opérateur de Laplace, ou Laplacien, est un opérateur différentiel représentant*



la divergence du gradient d'une fonction. Il s'agit donc de la somme des dérivées partielles de la fonction par rapport à toutes ses variables indépendantes en coordonnées cartésiennes. Si nous avons  $f(x_1, \dots, x_n)$ , alors

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Soit un système de deux espèces  $A(x, t)$  et  $B(x, t)$ , dont les fonctions de réaction sont données respectivement par  $F(A, B)$  et  $G(A, B)$  et dont les coefficients de diffusion sont  $D_A$  et  $D_B$ . Le système d'équations représentant leur dynamique est le suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= F(A, B) + D_A \nabla^2 A \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= G(A, B) + D_B \nabla^2 B. \end{aligned}$$

L'idée d'Alan Turing, publiée en 1952 dans son papier *The Chemical Basis of Morphogenesis* [1], est qu'en l'absence de diffusion ( $D_A = D_B = 0$ ),  $A$  et  $B$  tendent vers un équilibre uniforme stable et qu'ensuite, lors de l'introduction de la diffusion ( $D_A, D_B \neq 0$ ) et sous certaines conditions, des motifs non-homogènes peuvent apparaître. Pour comprendre cette idée, nous l'illustrons à l'aide d'un exemple tiré de [2]. Considérons un champ d'herbe sèche dans lequel il y a beaucoup de sauterelles qui peuvent humidifier l'herbe en suant si elles ont trop chaud. Supposons qu'un feu commence à se propager dans le champ. Le feu est considéré comme un *activateur* de coefficient de diffusion  $D_F$  et les sauterelles comme un *inhibiteur* de coefficient  $D_S$ . S'il n'y a pas d'humidité, le feu s'étend simplement à tout le champ. Cependant, nous supposons que lorsque les sauterelles ont suffisamment chaud, elles créent assez d'humidité pour que l'herbe ne brûle pas. Supposons que  $D_S \gg D_F$ . Alors, les sauterelles humidifient suffisamment l'herbe et empêchent la propagation du feu sur toute l'herbe. La zone brûlée est réduite à un domaine fini qui dépend des coefficients de réaction et de diffusion. Si, au lieu d'un seul endroit, le feu se déclarait à plusieurs endroits, nous aurions la formation de motifs. Cela ne serait pas le cas si  $D_F = D_S = 0$ . Notre but est de déterminer des conditions sur ces coefficients pour l'apparition de l'instabilité et donc la formation de tels motifs.

Tout système de réaction-diffusion peut être adimensionalisé avec les bons changements de variables pour atteindre la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) + D_u \nabla^2 u \\ \dot{v} &= g(u, v) + D_v \nabla^2 v. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Un système de réaction-diffusion a des instabilités dues à la diffusion, appelées instabilités de

Turing, si l'état stationnaire homogène est stable pour de petites perturbations lorsqu'il n'y a pas de diffusion mais qu'il ne l'est plus lorsque la diffusion intervient. Pour étudier la stabilité du système, nous commençons par considérer un point fixe du système, qui est de la forme

$$(u^*, v^*) \text{ tels que } f(u^*, v^*) = g(u^*, v^*) = 0.$$

## 1.2 Étude sans diffusion

**Sans diffusion**, le système (1.1) devient

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v).\end{aligned}$$

Afin de linéariser ces équations, nous introduisons

$$\begin{aligned}\delta u &= u - u^* \\ \delta v &= v - v^*\end{aligned}$$

l'écart de la position d'équilibre. Par un développement en série de Taylor d'ordre 1 en  $(u^*, v^*)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{\delta u} &= \underbrace{f(u^*, v^*)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*)\delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u^*, v^*)\delta v \\ \dot{\delta v} &= \underbrace{g(u^*, v^*)}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial u}(u^*, v^*)\delta u + \frac{\partial g}{\partial v}(u^*, v^*)\delta v,\end{aligned}$$

qui s'écrit, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta u} \\ \dot{\delta v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

où  $J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \Big|_{(u^*, v^*)}$  est la matrice Jacobienne du système, aussi appelée matrice de stabilité, avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= f_u, & \frac{\partial f}{\partial v} &= f_v, \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= g_u, & \frac{\partial g}{\partial v} &= g_v.\end{aligned}$$

Calculons les valeurs propres de  $J$ .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_u - \lambda & f_v \\ g_u & g_v - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(J) + |J| &= 0 \end{aligned}$$

où  $|J|$  désigne le déterminant de  $J$ . Nous avons

$$\Delta = \operatorname{tr}(J)^2 - 4|J|$$

où  $\operatorname{tr}(J)$  désigne la trace de  $J$ , c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux, et donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(J) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(J)^2 - 4|J|}}{2}.$$

Nous avons la stabilité si et seulement si  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . C'est le cas si, en accord avec la classification des points fixes se trouvant à la Figure 1.1.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(J) &= f_u + g_v < 0 \\ \text{et} \\ |J| &= f_u g_v - f_v g_u > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Puisque  $(u^*, v^*)$  sont des fonctions des paramètres de la dynamique, ces inégalités imposent des contraintes sur les paramètres.

### 1.3 Présentation d'un exemple

L'exemple que nous utiliserons durant tout le travail est un système appelé Brusselator, qui caractérise des réactions chimiques. Nous considérons les deux espèces  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  dont les équations de la dynamique, adimensionalisées, sont données par

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 1 - (b + 1)u + cu^2v \\ g(u, v) &= bu - cu^2v, \end{aligned}$$

où  $b$  et  $c$  sont des paramètres positifs.

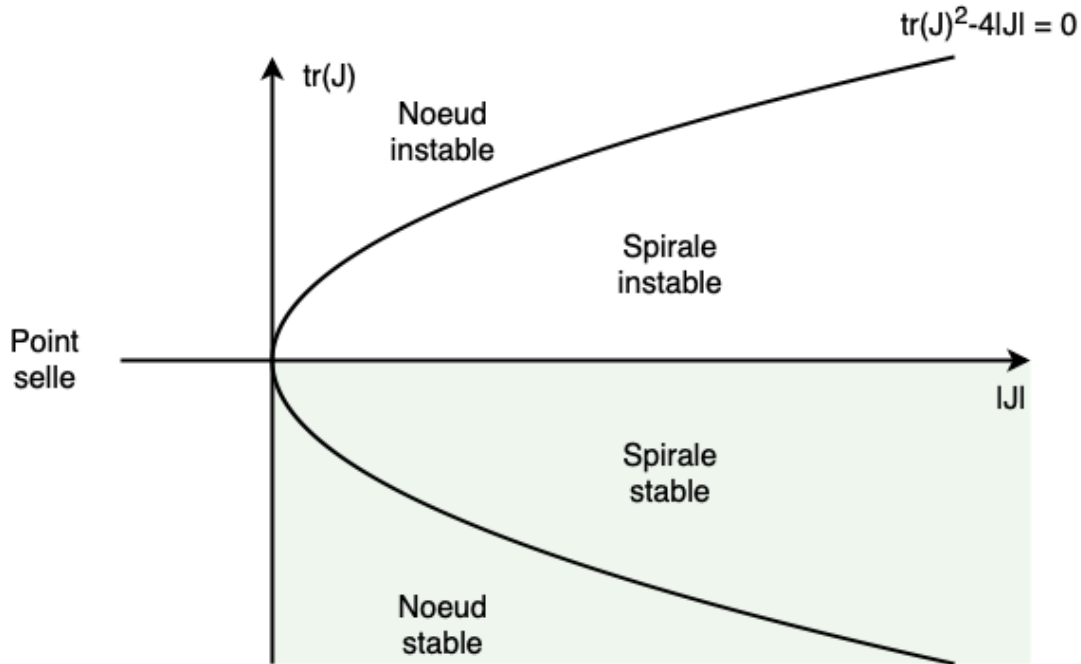


FIGURE 1.1 – Classification des points fixes d'un système en fonction de la trace et du déterminant de sa Jacobienne, tirée d'une leçon de Steven H. Strogatz, *Two dimensional nonlinear systems fixed points* [3] basée sur le livre [4]. La zone verte correspond aux points fixes stables.

### Nullclines :

Nous commençons par calculer et représenter les nullclines de ce système. Il s'agit des courbes correspondant à la croissance nulle des variables. Les points fixes du système se trouvent aux intersections des nullclines.

$$f(u, v) = 0 \Leftrightarrow 1 - (b + 1)u + cu^2v = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{(b + 1)u - 1}{cu^2}$$

et

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow bu - cu^2v = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{b}{cu}.$$

Les nullclines sont représentées à la Figure 1.2 pour le choix de paramètres  $b = 8$ ,  $c = 10$ .

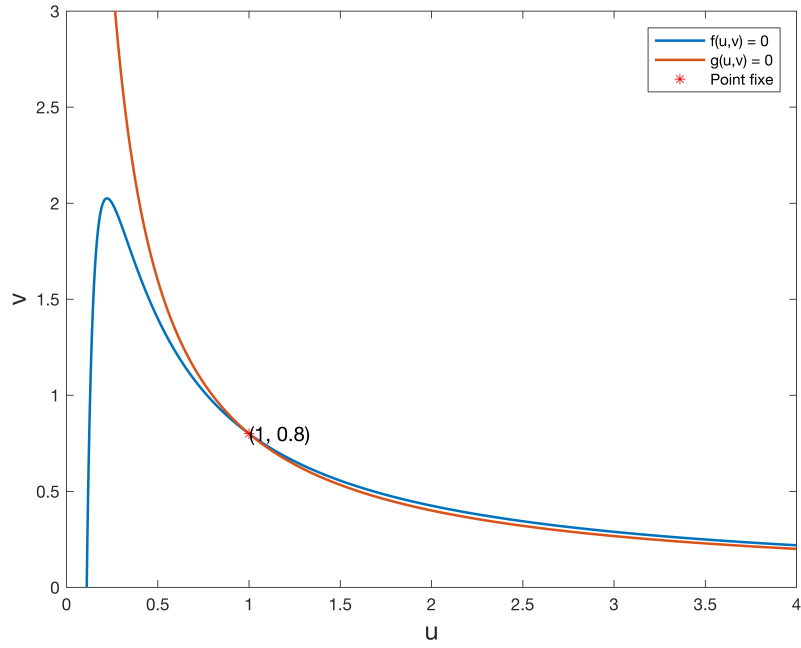


FIGURE 1.2 – Nullclines du système Brusselator avec  $b = 8$  et  $c = 10$ .

## Points fixes

Afin de calculer les points fixes du système homogène, nous résolvons  $f(u, v) = g(u, v) = 0$  pour  $u$  et  $v$ .

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} f(u, v) = 1 - (b + 1)u + cu^2v = 0 \\ g(u, v) = bu - cu^2v = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 1 - b - 1 + cu^2v + bu - cu^2v = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{b}{c} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le point  $(1, \frac{b}{c})$  est le seul point fixe du système.

## Stabilité

Calculons la Jacobienne du système :

$$\begin{aligned}
 J &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{array} \right) \Big|_* \\
 &= \left( \begin{array}{cc} -b-1+2cuv & cu^2 \\ b-2cuv & -cu^2 \end{array} \right) \Big|_* \\
 &= \begin{pmatrix} b-1 & c \\ -b & -c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nous avons la stabilité du système si la trace de sa Jacobienne est négative et si son déterminant est positif, donc

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(J) &= f_u + g_v < 0 && \Leftrightarrow c > b-1 \\
 \text{et} \\
 |J| &= f_u g_v - f_v g_u > 0 && \Leftrightarrow c > 0.
 \end{aligned}$$

## 1.4 Étude avec diffusion

**Si nous considérons tout le système** et que nous le linéarisons autour du point fixe  $(u^*, v^*)$ , comme dans la section précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta u} &= (f_u + D_u \nabla^2) \delta u + f_v \delta v \\
 \dot{\delta v} &= g_u \delta u + (g_v + D_v \nabla^2) \delta v,
 \end{aligned}$$

qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta u} \\ \dot{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u + D_u \nabla^2 & f_v \\ g_u & g_v + D_v \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

ou encore, pour plus de facilité,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\delta u} \\ \dot{\delta v} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}}_D \nabla^2 \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} \\
 &= (J + D \nabla^2) \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Calculons les fonctions propres  $v(t)$  de  $J + D \nabla^2$  associées aux valeurs propres  $\lambda$ , c'est-à-dire

que nous cherchons à résoudre

$$(J + D\nabla^2)v = \lambda v. \quad (1.3)$$

Supposons que  $w_\kappa$  soit une fonction propre de l'opérateur linéaire  $\nabla^2$ , associée à la valeur propre  $\kappa$  et solution du problème aux valeurs propre spatial défini par

$$\nabla^2 w_\kappa = \kappa w_\kappa. \quad (1.4)$$

Par une propriété de l'opérateur Laplacien, ses fonctions propres sont orthogonales et forment une base. Nous cherchons des solutions au problème (1.3) de la forme

$$v(t) = \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa \quad (1.5)$$

où  $\lambda$  est fonction propre du système complet associée au vecteur propre  $v$ . En substituant (1.5) dans (1.3) avec (1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa &= (J + D\nabla^2) \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa \\ &= J \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa + D \sum_{\kappa} e^{\lambda t} \underbrace{\nabla^2 w_\kappa}_{=\kappa w_\kappa} \\ &= J \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa + D \sum_{\kappa} e^{\lambda t} \kappa w_\kappa \\ &= (J + \kappa D) \sum_{\kappa} e^{\lambda t} w_\kappa \\ \lambda v &= (J + \kappa D)v. \end{aligned}$$

Calculer les valeurs propres de  $(J + \nabla^2 D)$  revient en fait à calculer les valeurs propres de  $(J + \kappa D)$ , pour chaque  $\kappa$  fonction propre de  $\nabla^2$ . Nous pouvons calculer les valeurs propres  $\lambda$  du système en calculant les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} |J + \kappa D - I\lambda_\kappa| &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f_u + \kappa D_u - \lambda_\kappa & f_v \\ g_u & g_v + \kappa D_v - \lambda_\kappa \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \lambda_\kappa^2 - \lambda_\kappa (\kappa(D_u + D_v) + (tr(J))) + h(\kappa) &= 0 \\ \text{où } h(\kappa) &= D_u D_v \kappa^2 + (f_u D_v + g_v D_u) \kappa + |J|. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda_{1\kappa} = \frac{(\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J)) + \sqrt{(\kappa^2(D_u + D_v) + \text{tr}(J))^2 - 4h(\kappa)}}{2}$$

$$\lambda_{2\kappa} = \frac{(\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J)) - \sqrt{(\kappa^2(D_u + D_v) + \text{tr}(J))^2 - 4h(\kappa)}}{2}.$$

La solution  $\lambda_{2\kappa}$  ne nous intéresse pas car nous voulons que sa partie réelle soit positive or  $\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J)$  étant toujours négative,  $\lambda_2$  l'est aussi. Nous travaillons donc avec  $\lambda_{1\kappa} := \lambda_\kappa$ . Pour avoir des instabilités dues à la diffusion, nous avons besoin de  $\text{Re}(\lambda_\kappa) < 0$  pour  $\kappa = 0$  et  $\text{Re}(\lambda_\kappa) > 0$  pour  $\kappa \neq 0$ . Si  $\kappa = 0$ , alors nous revenons au cas sans diffusion et nous avons les conditions (1.2). Si  $\kappa \neq 0$ , nous aurons  $\text{Re}(\lambda_\kappa) > 0$  si

$$\begin{aligned} & (\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J)) + \sqrt{(\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J))^2 - 4h(\kappa)} > 0 \\ \Leftrightarrow & (\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J))^2 > (\kappa(D_u + D_v) + \text{tr}(J))^2 - 4h(\kappa) \\ \Leftrightarrow & h(\kappa) < 0 \end{aligned}$$

Étant donné que, par (1.2) car nous voulons un équilibre homogène stable,  $\text{tr}(J) < 0$  et  $|J| > 0$ , la seule façon d'avoir  $h(\kappa) < 0$  est que  $f_u D_v + g_v D_u > 0$ . Cette inégalité est nécessaire mais pas suffisante pour garantir que  $\text{Re}(\lambda_\kappa) > 0 \forall \kappa \neq 0$ . Nous aimerions que le minimum de  $h(\kappa)$  soit négatif. Calculons-le. Tout d'abord, nous dérivons  $h(\kappa)$  et annulons la dérivée pour obtenir  $\kappa_{min}$ , qui minimise  $h(\kappa)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{dh(\kappa)}{d\kappa} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2D_u D_v \kappa + (f_u D_v + g_v D_u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \kappa_{min} = -\frac{f_u D_v + g_v D_u}{2D_u D_v}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous évaluons  $h(\kappa_{min})$  qui donne la valeur minimale de  $h(\kappa)$ .

$$\begin{aligned} & h_{min} = h(\kappa_{min}) < 0 \\ \Leftrightarrow & D_u D_v \frac{(f_u D_v + g_v D_u)^2}{4D_u^2 D_v^2} - (f_u D_v + g_v D_u) \frac{f_u D_v + g_v D_u}{2D_u D_v} + |J| < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(f_u D_v + g_v D_u)^2}{4D_u D_v} - \frac{(f_u D_v + g_v D_u)^2}{2D_u D_v} + |J| < 0 \\ \Leftrightarrow & |J| - \frac{(f_u D_v + g_v D_u)^2}{4D_u D_v} < 0. \end{aligned}$$

Pour résumer, les conditions pour la génération de motifs spatiaux dans un système de



réaction-diffusion à deux espèces de la forme (1.1) sont données par

$$\begin{aligned}
f_u + g_v &< 0, \\
f_u g_v - f_v g_u &> 0, \\
f_u D_v + g_v D_u &> 0, \\
\text{et} \\
(f_u D_v + g_v D_u)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u) &> 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

## 1.5 Application à un exemple

Reprenons le système Brusselator en y ajoutant des termes de diffusion.

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= 1 - (b+1)u + cu^2v + D_u u_{xx} \\
\dot{v} &= bu - cu^2v + D_v v_{xx}.
\end{aligned}$$

Avec les nouvelles conditions (1.7), nous avons les inégalités suivantes.

$$f_u + g_v < 0 \Rightarrow c > b - 1 \tag{1.8}$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \Rightarrow c > 0$$

$$f_u D_v + g_v D_u > 0 \Rightarrow c < (b-1) \frac{D_v}{D_u} \tag{1.9}$$

$$(f_u D_v + g_v D_u)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u) > 0 \Rightarrow ((b-1)D_v - cD_u)^2 > 4cD_u D_v.$$

Ces inégalités définissent un domaine dans l'espace de paramètres  $(b, c)$ , qui s'appelle l'espace de formation de motifs (ou espace de Turing). Celui-ci est représenté en Figure 1.3 pour différentes valeurs du rapport  $\frac{D_v}{D_u}$ . Nous observons que l'espace se réduit lorsque le rapport diminue, et que celui-ci n'existe plus lorsque le rapport atteint 1. En effet, par (1.8) et (1.9),  $\frac{D_v}{D_u}$  doit toujours être strictement supérieur à 1.

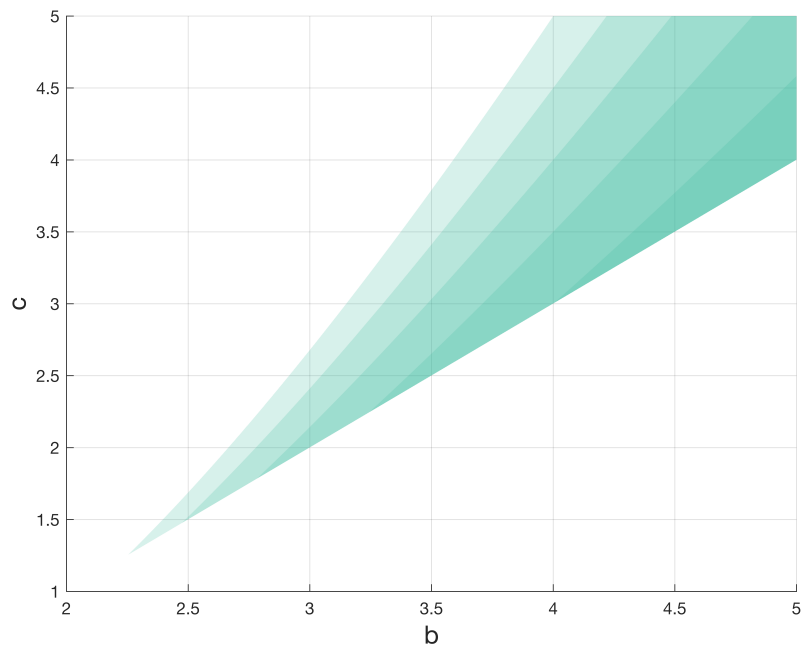


FIGURE 1.3 – Espace de formation de motifs pour le Brusselator en fonction du rapport  $\frac{D_v}{D_u}$ . Les zones les plus claires correspondent à  $\frac{D_v}{D_u} > 1$  et les zones les plus foncées correspondent à  $\frac{D_v}{D_u} \searrow 1$ .



## Chapitre 2

# Diffusion sur un réseau

L'objectif de ce chapitre est de transposer la théorie développée dans le chapitre précédent sur des réseaux. Pour ce faire, nous commençons par poser un cadre théorique en fournissant quelques rappels et définitions de théorie des graphes. Ensuite, nous décrivons la méthode de Watts-Strogatz, qui permet de générer les graphes sur lesquels nous travaillons. Nous avons alors tous les outils nécessaires à la définition d'un système de réaction-diffusion sur un réseau. Nous effectuons une étude similaire à celle du cas continu, afin de trouver des conditions d'apparition d'instabilités de Turing, en nous basant sur l'article [5]. Dans un premier temps, nous travaillons avec une matrice de diffusion diagonale et présentons quelques résultats. Enfin, nous étendons notre recherche au cas d'une matrice de diffusion contenant des termes non-diagonaux et appliquons une fois encore nos résultats à l'exemple du Brusselator.

### 2.1 Rappels de théorie des graphes

Dans cette section, nous posons les différentes définitions et notations utiles à la création et l'utilisation de graphes. Celles-ci sont reprises dans les sources [6] et [7].

Soit un graphe appelé  $G$  et possédant  $N$  noeuds et  $M$  arêtes. Les noeuds du graphe sont notés  $v_i$  avec  $i = 1, \dots, N$ .

**Définition 2.1.1.** *Deux noeuds  $v_i$  et  $v_j$  incidents à la même arête sont dits adjacents.*

**Définition 2.1.2.** *Un graphe est dit simple s'il n'existe pas deux arêtes reliant les mêmes noeuds, ni de boucle, c'est-à-dire une arête ayant le même noeud à chaque extrémité.*

Nous travaillons avec des graphes simples et non-orientés, ce qui signifie que si il existe une arête entre les noeuds  $v_i$  et  $v_j$ , alors il existe une arête entre  $v_j$  et  $v_i$ .

**Définition 2.1.3.** *La matrice d'adjacence d'un graphe  $G$  est une matrice carrée  $A$  de taille  $N \times N$  dont l'élément  $i, j$  est le nombre d'arêtes existant entre le noeud  $v_i$  et le noeud  $v_j$ .*

Typiquement, dans le cas d'un réseau non-pondéré,  $A_{ij} = 1$  si il existe un lien entre les noeuds  $v_i$  et  $v_j$  et  $A_{ij} = 0$  sinon ( $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$ ). Étant donné que dans notre cas,  $G$  est également non-orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique.

**Définition 2.1.4.** *Le degré d'un noeud est le nombre d'arêtes incidentes à celui-ci. Le degré du noeud  $i$  est noté*

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (i = 1, \dots, N).$$

*Le degré moyen d'un graphe correspond à la moyenne des degrés de ses noeuds.*

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i$$

**Définition 2.1.5.** *La matrice Laplacienne d'un graphe  $G$  est une matrice carrée  $L$  de taille  $N \times N$  dont l'élément  $i, j$  est donné par*

$$L_{ij} = A_{ij} - k_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon.

La matrice Laplacienne d'un graphe simple et non-orienté est symétrique et les sommes de ses éléments sur les lignes et les colonnes est nulle. Cette matrice correspond en fait à une approximation du Laplacien en domaine continu  $\nabla^2$ , d'où son nom et son utilisation dans le contexte des réseaux. Elle est parfois définie par  $L_{ij} = k_i \delta_{ij} - A_{ij}$ , ce qui la rend définie positive et apporte certains avantages lors de son utilisation. Ici, nous gardons la définition 2.1.5. La matrice Laplacienne possède toujours une valeur propre nulle (associée au vecteur propre  $(1, 1, \dots, 1)^T$ ). Dans le cas d'un graphe simple,  $\lambda = 0$  est une valeur propre isolée (c'est-à-dire qu'elle est de multiplicité 1) et les autres valeurs propres sont telles que, avec notre définition,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N_1} < \lambda_N = 0$ . Les vecteurs propres de  $L$  sont orthogonaux.

**Définition 2.1.6.** *Un parcours est une suite  $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$  où  $v_0 v_1 \dots$  sont des noeuds et  $e_1 e_2 \dots$  sont des arêtes reliant les consécutifs.*

**Définition 2.1.7.** *Un chemin est un parcours dont les noeuds sont tous distincts.*

**Définition 2.1.8.** *La distance  $d(v_i, v_j)$  entre les noeuds  $v_i$  et  $v_j$  d'un graphe est le nombre d'arêtes minimal d'un parcours entre ces deux noeuds. Si un tel parcours n'existe pas,  $d(v_i, v_j) = \infty$ .*

**Lemme 2.1.1.** *Le plus court parcours entre deux noeuds  $v_i$  et  $v_j$  est un chemin. Nous parlerons alors de plus court chemin.*

Le nombre de triangles (trois noeuds connectés) dans un graphe est caractérisé par son coefficient de clustering global. Pour le calculer, il faut utiliser le coefficient de clustering local de chaque noeud.

**Définition 2.1.9.** Le coefficient de clustering local d'un noeud  $v_i$  est donné par

$$C_i = \frac{\text{nombre de triangles contenant le noeud } i}{k_i(k_i - 1)/2}.$$

**Définition 2.1.10.** Le coefficient de clustering global d'un graphe est la moyenne des coefficients de clustering locaux de ses noeuds.

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i.$$

**Définition 2.1.11.** Une clique d'un graphe est un ensemble de nœuds deux à deux adjacents.

Un exemple de clique se trouve à la Figure 2.1.

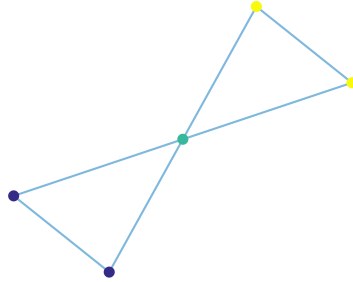


FIGURE 2.1 – Exemple de graphe contenant deux cliques. Les noeuds d'une même couleur appartiennent à la même clique.

## 2.2 Création de graphes

Les graphes sur lesquels nous travaillons sont générés par la méthode de Watts-Strogatz. Cette méthode permet de générer des graphes possédant des propriétés dites de "petit monde", ce qui signifie qu'ils modélisent des réseaux réalistes (tels que des réseaux sociaux). Leurs particularités sont les suivantes :

- Le plus court chemin entre deux noeuds est faible.
- Le coefficient de clustering du graphe est élevé.

La procédure de construction d'un graphe par la méthode de Watts-Strogatz est la suivante [9] :

Soit  $N$  le nombre de noeuds,  $2K$  le degré moyen (un entier pair) et  $\beta \in [0, 1]$  la probabilité de recâblage.

1. Créer un treillis circulaire de  $N$  noeuds et de degré moyen  $2K$ . Chaque noeud est connecté à ses  $K$  plus proches voisins de chaque côté.
2. Pour chaque arête du graphe, recâbler cette arête avec la probabilité  $\beta$ . L'arête recâblée ne peut être un duplicata d'une autre arête ni créer de boucle.

En fonction du paramètre  $\beta$ , il est donc possible d'obtenir des graphes réguliers (Figure 2.2a), des graphes intermédiaires (Figure 2.2b) et des graphes aléatoires (Figure 2.2c). Ces figures ont été créées avec le logiciel Matlab [8], à l'aide d'un code basé sur le code `WattsStrogatz.m` [9], qui génère des graphes par la méthode Watts-Strogatz en fonction des paramètres  $N$ ,  $K$  et  $\beta$ .

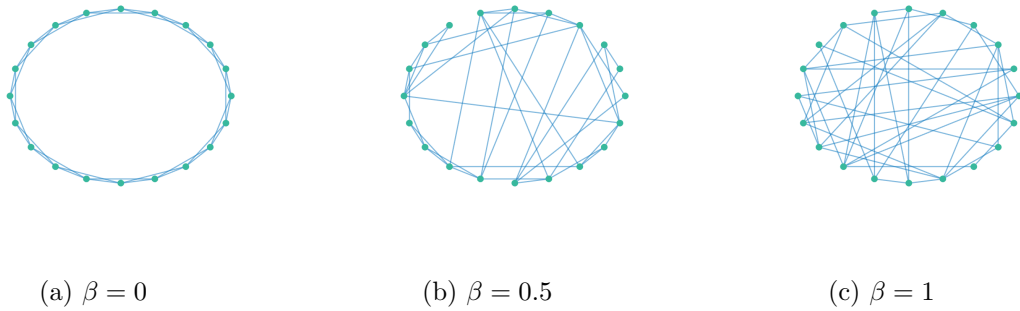


FIGURE 2.2 – Graphes de 20 noeuds, de degré moyen 4 générés par la méthode de Watts-Strogatz.

### Distribution des degrés

Lorsque  $\beta = 0$ , nous avons un treillis circulaire parfaitement régulier car aucune arête n'est recâblée. Le degré de chaque noeud est donc de  $2K$ . Lorsque  $\beta$  augmente, la distribution des degrés se change en une gaussienne centrée sur  $2K$ . Plus  $\beta$  est grand, plus l'écart-type de la distribution diminue. La distribution des degrés de graphes de 500 noeuds avec  $K = 25$ , pour  $\beta \neq 0$  est représentée à la Figure 2.3.

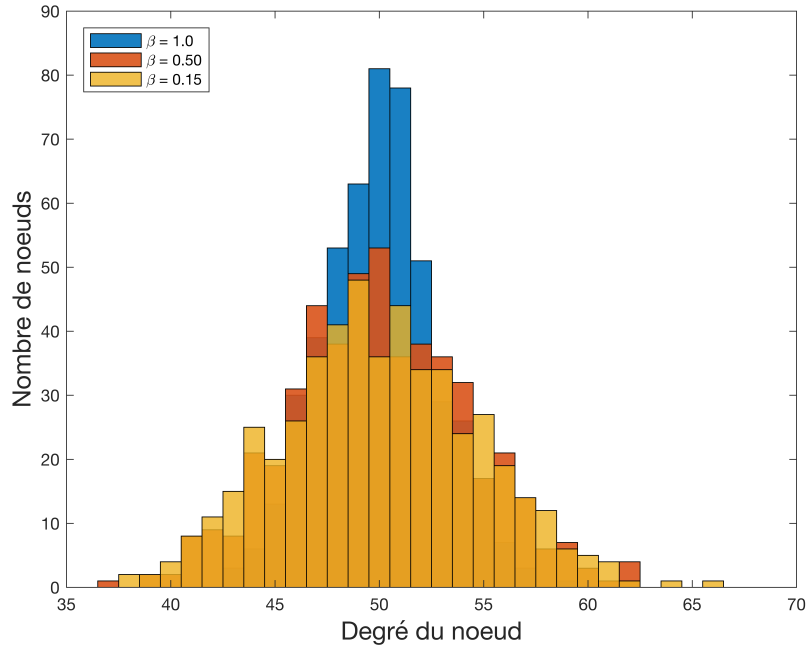


FIGURE 2.3 – Distribution des degrés pour plusieurs valeurs de  $\beta$ ;  $N = 500$  et  $K = 25$ , source : [9].

### Plus court chemin et coefficient de clustering

Tout comme les graphes purement aléatoires générés par la méthode d'Erdős-Rényi [7], les graphes "petit monde" présentent un plus court chemin relativement faible. En revanche, ils possèdent un coefficient de clustering plus élevé que ceux-ci, ce qui favorise l'apparition de cliques. C'est pourquoi ils sont utiles pour modéliser des réseaux "naturels". À la Figure 2.4, nous représentons la comparaison des deux types de graphes du point de vue de ces deux quantités. Les graphes font tous 500 noeuds et ont un degré moyen de 50. Le coefficient de clustering global des graphes de Watts-Strogatz est effectivement plus élevé que celui des graphes d'Erdős-Rényi, jusqu'à  $\beta = 0.5$ , à partir duquel les graphes deviennent de plus en plus aléatoires. Le plus court chemin moyen, bien que plus élevé que celui des graphes d'Erdős-Rényi, reste assez faible pour les graphes de Watts-Strogatz.



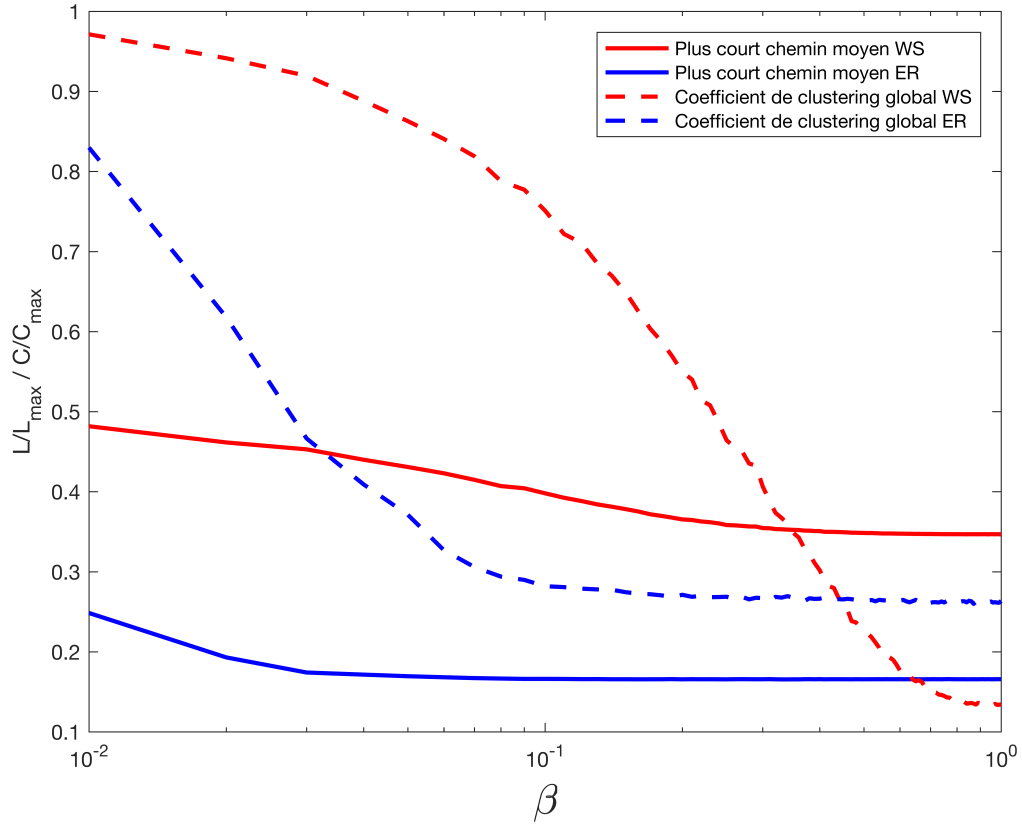


FIGURE 2.4 – Comparaison des caractéristiques des graphes générés par la méthode de Watts-Strogatz et d’Erdős-Rényi,  $N = 500$ ,  $\langle k \rangle = 50$ .

## 2.3 Modélisation du système

Le but de cette section est de transposer la théorie du chapitre précédent sur des réseaux. Tout d’abord, nous avons vu que la forme générale d’un système de réaction-diffusion en domaine continu s’écrivait sous la forme :

$$\dot{X}_a = f_a(\vec{X}) + D_a \nabla^2 X_a, \quad a = 1, \dots, M,$$

où  $M$  est le nombre d’espèces,  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_M)$ ,  $f_a$  la fonction décrivant les relations entre les différentes espèces et  $D_a$  la constante de diffusion intervenant dans le système. Pour transposer ces équations pour des espèces évoluant sur un réseau, nous introduisons la notation  $X_{ia}$ , qui représente la concentration de l’espèce  $a$  sur le noeud  $i$  du réseau. La forme générale d’un système de réaction-diffusion de  $M$  espèces sur un réseau de  $N$  noeuds peut donc s’écrire sous

la forme :

$$\dot{X}_{ia} = \underbrace{f_a(\vec{X}_i)}_{\text{réactions entre espèces sur un même noeud}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{b=1}^M D_{ab} L_{ij} X_{jb}}_{\text{diffusion des différentes espèces sur les différents noeuds}}, \quad i = 1, \dots, N$$

où  $\vec{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{iM})$  représente les concentrations des différentes espèces sur le noeud  $i$  et  $D_{ab}$  est la constante de diffusion de l'espèce  $a$  influencée par la quantité de  $b$ . Dans le cas d'espèces chimiques, la constante de diffusion ne varie pas, le déplacement des agents ne dépend pas des autres agents. Dans un contexte écologique, il existe une dépendance entre les diffusions des différentes espèces. En effet, la concentration d'une espèce en un noeud peut influencer le fait qu'une autre espèce se déplace vers ce noeud ou ait tendance à l'éviter.

De la même façon qu'en domaine continu, nous voulons linéariser le système pour en étudier la stabilité. Soit le point fixe caractérisé par

$$\forall i, X_{ia}^* = X_a^* \text{ tel que } f_a(\vec{X}_i^*) = 0.$$

Il s'agit bien d'un point fixe de tout le système ( $\dot{X}_{ia} = 0$ ) car les sommes sur les lignes et les colonnes de la matrice Laplacienne sont nulles. Par conséquent, puisque les concentrations en chaque noeud sont toutes identiques,  $\sum_j L_{ij} X_{jb} = 0 \quad \forall b$ .

Les taux de réactions en un noeud dépendent uniquement des concentrations en ce noeud, par conséquent, ils s'annulent lorsqu'elles sont dérivées par rapport aux concentrations dans les autres noeuds. La dérivée des termes de réaction se fait de la même manière que dans le système sans diffusion, c'est-à-dire que

$$\left. \frac{\partial f_a(\vec{X}_i)}{\partial X_{jb}} \right|_* = \delta_{ij} \frac{\partial f_a}{\partial X_b}(\vec{X}_i^*) := P_{ab}.$$

La matrice  $P$  est en fait la Jacobienne du système sans diffusion et sa contribution au système général peut être représentée par une matrice  $\mathbb{1}_N \otimes P$ , car elle intervient en chaque noeud du réseau en considération. Le symbole  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

**Définition 2.3.1.** Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $p \times q$ , leur produit de Kronecker est la matrice blocs de taille  $mp \times nq$  définie par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Pour ce qui est des termes relatifs à la diffusion, nous supposons ici que nous travaillons

avec une diffusion linéaire par rapport à la concentration. Lors de la dérivation, nous obtenons donc :

$$\left. \frac{\partial}{\partial X_{jb}} \sum_{k,d} D_{ad} L_{ik} X_{ka} \right|_* = \sum_{k,d} D_{ad} L_{ik} \delta_{jk} \delta_{bd} = D_{ab} L_{ij}.$$

Cette expression peut être réécrite sous forme matricielle de cette façon :  $L \otimes D$ , où  $D$  est, dans notre cas, une matrice diagonale de taille  $n$  dont les termes sont les constantes de diffusion des différentes espèces. La Jacobienne du système général est donc donnée par

$$J = \mathbb{1}_N \otimes P + L \otimes D.$$

Cette matrice possédant une structure en blocs, il existe une structure similaire dans sa décomposition en valeurs et vecteurs propres, que nous allons maintenant calculer. Nous considérons les vecteurs propres structurés comme

$$w = v \otimes q$$

où  $v$  est un vecteur de dimension  $N$  et  $q$  un vecteur de dimension  $M$ . Soit  $v$  un vecteur propre de la matrice  $L$  associé à la valeur propre  $\kappa$ , de sorte que

$$Lv = \kappa v.$$

Soit  $q$  un vecteur propre de  $P + \kappa D$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Alors, nous montrons que  $w$  est un vecteur propre de  $J$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . En effet,

$$\begin{aligned} Jw &= (\mathbb{1}_N \otimes P + L \otimes D).(v \otimes q) \\ &= (\mathbb{1}_N \otimes P).(v \otimes q) + (L \otimes D).(v \otimes q) \\ &= \mathbb{1}_N v \otimes Pq + Lv \otimes Dq \\ &= v \otimes Pq + \kappa v \otimes Dq \\ &= v \otimes (P + \kappa D)q \\ &= v \otimes \lambda q \\ &= \lambda(v \otimes q) \\ &= \lambda w. \end{aligned}$$

La spectre de la matrice  $J$  peut donc être calculé de la façon suivante, en fonction des valeurs propres de  $L$  :

$$sp(J) = \bigcup_{\kappa \in sp(L)} sp(P + \kappa D). \quad (2.1)$$

Puisque nous avons vu que la matrice Laplacienne  $L$  possédait une et une seule valeur propre  $\kappa = 0$ , le spectre de  $J$  y correspondant est en fait le spectre de  $P$ , ce qui signifie que le système

possède toujours au minimum un mode stable.

## 2.4 Diffusion simple

Supposons que nous disposons d'un réseau dont la matrice Laplacienne est  $L$ , de taille  $N \times N$ . Nous nous intéressons au cas où les espèces ne peuvent se déplacer que par rapport à leur propre espèce, c'est-à-dire le cas où la matrice  $D$  est diagonale. Afin de calculer analytiquement les conditions sous lesquelles peut apparaître une instabilité due à la diffusion, nous nous restreignons à un système de deux espèces, c'est-à-dire  $N = 2$ , avec  $X_1 = u$  et  $X_2 = v$ ,  $f_1 = f$ ,  $f_2 = g$ ,  $D_{11} = D_u$  et  $D_{22} = D_v$ . Le système devient alors, pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= f(u_i, v_i) + D_u \sum_j L_{ij} u_j, \\ \dot{v}_i &= g(u_i, v_i) + D_v \sum_j L_{ij} v_j, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $D_u$  et  $D_v$  sont les constantes de diffusion des deux espèces. L'étude de la stabilité du système est analogue à l'étude en domaine continu, à ceci près que nous travaillons avec des matrices et plus des opérateurs linéaires. Soit un équilibre du système,  $(u_i^*, v_i^*) = (u^*, v^*)$  tel que  $f(u^*, v^*) = g(u^*, v^*) = 0$ . La matrice  $P$  du développement ci-dessus est la Jacobienne du système sans diffusion, soit

$$P = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{array} \right) \Big|_* := \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

et la matrice  $C$  est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}$$

Les instabilités que nous cherchons à étudier sont induites par la diffusion, ce qui veut dire que nous voulons que le système soit stable sans diffusion, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} f_u = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_* &> 0, & g_u = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_* &< 0, \\ f_v = \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_* &> 0, & g_v = \frac{\partial g}{\partial v} \Big|_* &< 0. \end{aligned}$$

Afin d'identifier les conditions d'apparition d'instabilités, nous calculons analytiquement le spectre de la Jacobienne du système avec diffusion selon la formule donnée dans (2.1). Soit  $\kappa$  une valeur propre quelconque de la matrice  $L$ , nous calculons les deux valeurs propres de

$P + \kappa D$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} f_u + \kappa D_u - \lambda_\kappa & f_v \\ g_u & g_v + \kappa D_v - \lambda_\kappa \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (f_u + \kappa D_u - \lambda_\kappa)(g_v + \kappa D_v - \lambda_\kappa) - f_v g_u = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda_\kappa^2 - \lambda_\kappa (f_u + g_v + \kappa(D_u + D_v)) \\
& \quad + f_u g_v - f_v g_u + \kappa(f_u D_v + g_v D_u) + \kappa^2 D_u D_v = 0
\end{aligned}$$

Afin de déterminer des conditions sur les constantes  $D_u$  et  $D_v$ , posons  $d = \frac{D_v}{D_u}$ . L'équation devient alors :

$$\lambda_\kappa^2 - \lambda_\kappa (tr(P) + \kappa D_u(d + 1)) + |P| + \kappa D_u(df_u + g_v) + \kappa^2 D_u^2 d = 0 \quad (2.3)$$

Les valeurs propres  $\lambda_{\kappa_{1,2}}$  de  $P + \kappa D$ , associées à la valeur propre  $\kappa$  de  $L$  sont alors :

$$\lambda_{1,2\kappa} = \frac{1}{2} \left( tr(P) + \kappa D_u(d + 1) \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (2.4)$$

où

$$\Delta = (tr(P) + \kappa D_u(d + 1))^2 - 4(|P| + \kappa D_u(df_u + g_v) + \kappa^2 D_u^2 d)$$

Une instabilité de Turing apparaît lorsque, pour une certaine valeur de  $\kappa$ , nous avons  $Re(\lambda_\kappa) \geq 0$ . Il est possible de calculer une valeur critique de  $\kappa$ , appelé  $\kappa_c$ , à partir duquel des instabilités peuvent survenir. Cette valeur critique est caractérisée par

$$\exists \kappa := \kappa_c \text{ t. q. } Re(\lambda_{\kappa_c}) = 0 \text{ et } Re(\lambda_\kappa) < 0 \quad \forall \kappa < \kappa_c$$

Afin de pouvoir appliquer ce développement à notre exemple, il est intéressant de calculer le rapport  $d_c$  correspondant à cette valeur critique.  $Re(\lambda_\kappa)$  peut être positif si le coefficient de  $\lambda_\kappa$  est négatif ou si le terme indépendant est négatif dans l'équation caractéristique (2.3). Puisque  $tr(P) < 0$  par (1.7) et que  $\kappa D_u(d + 1)$  est toujours négatif, la seule façon d'avoir  $Re(\lambda_\kappa) > 0$  est que la quantité  $|P| - \kappa D_u(df_u + g_v) + \kappa^2 D_u^2 d$ , que nous noterons  $h(\kappa)$ , soit négative. Pour ce faire, il faut donc que  $h_{min}$  soit négatif. Différencions cette expression par rapport à  $\kappa$  afin d'en déterminer le minimum.

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} h(\kappa) = D_u(df_u + g_v) + 2\kappa D_u^2 d.$$

Alors,

$$k_{min} = -\frac{df_u + g_v}{2D_u d} \text{ et } h_{min} = |P| - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}.$$

La valeur critique de  $d$  doit être celle qui rend  $h_{min} = 0$ , c'est-à-dire être racine de  $d^2 f_u^2 + 2d(f_u g_v + 2f_v g_u) + g_v^2$ . Le rapport critique  $d_c$  est donc donné par

$$d_c = \frac{f_u g_v - 2f_v g_u + 2\sqrt{f_v g_u(f_v g_u - f_u g_v)}}{f_u^2}. \quad (2.5)$$

Le développement et le résultat sont identiques au cas continu.

### 2.4.1 Application à un exemple

#### Dispersion de $\lambda$

Reprenons le système de l'exemple Brusselator. Nous gardons le choix de paramètres  $b = 8$  et  $c = 10$  qui nous permettent d'avoir un équilibre stable en  $(1, 0.8)$ . Rappelons que pour avoir des instabilités de Turing, nous devons avoir  $f_u > 0$  et  $g_v < 0$ , ce qui est bien le cas ici car

$$P = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -8 & -10 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

L'équilibre est bien stable car les valeurs propres de  $P$  sont  $\lambda_1 = -1.5 + 2.7839i$  et  $\lambda_2 = -1.5 - 2.7839i$  (nous avons un foyer stable [10]).

Pour analyser le spectre de la Jacobienne du système complet, nous commençons par générer un réseau aléatoire qui contient  $N = 50$  noeuds par la méthode de Watts-Strogatz, avec une probabilité de rattachement de  $\beta = 0.5$  et un degré moyen de  $2K = 4$ . Nous calculons la valeur critique du rapport  $\frac{D_v}{D_u}$ ,  $d_c$  vaut 2.9912 par la formule (2.5). Nous fixons le paramètre  $D_u = 1$  et nous faisons varier  $D_v$  de sorte que le rapport  $d = \frac{D_v}{D_u}$  prenne les valeurs suivantes :  $\{1.5, 2.9912, 7.5\}$ . La relation de dispersion est représentée de façon continue en calculant la quantité (2.4) pour chaque valeur  $\kappa \in [0, \kappa_{max}]$  et la dispersion discrète en affichant la partie réelle de la plus grande valeur propre de  $J$  pour chaque  $\kappa$ ,  $Re(\lambda_{k_{max}})$ . La courbe continue représente donc les valeurs que *peuvent* prendre les valeurs propres de  $J$  et la courbe discrète représente les valeurs qu'elles *prennent* effectivement. Les résultats pour les trois valeurs de  $d$  se trouvent à la Figure 2.5. Tout d'abord, nous remarquons que, peu importe la valeur de  $d_c$ , le point correspondant à  $\kappa = 0$  est toujours négatif et prend la valeur de la partie réelle de la plus grande valeur propre de  $P$ , à savoir ici  $-1.5$ . Nous observons bien que la valeur  $d_c$  entraîne que l'un des modes est nul et, au-delà de cette valeur, un ou plusieurs modes peuvent devenir positifs. C'est dans ces cas que nous voyons apparaître des instabilités de Turing.

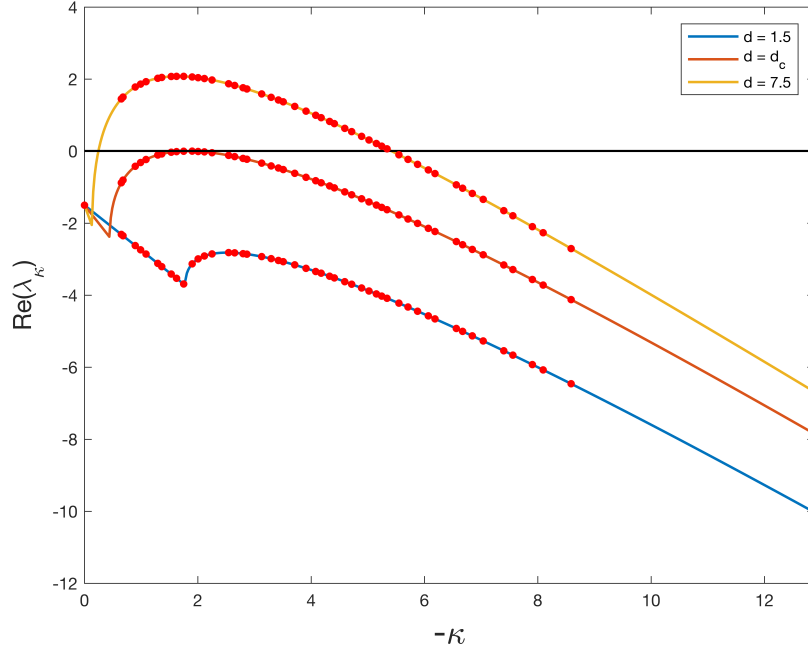


FIGURE 2.5 – Valeur de  $\lambda_\kappa$  en fonction de  $\kappa$  pour plusieurs valeurs de  $d$ . Les traits continus représentent la relation continue et les points rouges représentent la relation discrète.

### Intégration du système

Nous intégrons maintenant les équations différentielles avec la méthode Runge Kutta 4 [11], avec pour condition initiale l'équilibre légèrement perturbé, pour  $d = 1.5$  et  $d = 7.5$ . Les solutions  $u(t)$ ,  $v(t)$  sont représentées au cours du temps sur la Figure 2.6. Lorsque  $d = 1.5$ , c'est-à-dire lorsque l'équilibre reste stable, nous intégrons jusqu'à  $t = 20$ . Nous observons que quand  $t = 0$ , les concentrations de  $u$  et  $v$  sont un peu écartées de leur équilibre mais que très rapidement, elles tendent à revenir à l'équilibre. Au contraire, lorsque  $d = 7.5$ , nous pouvons observer l'apparition d'instabilités. En effet, lorsque  $t$  augmente, les concentrations se stabilisent sur d'autres valeurs que celles de l'équilibre. C'est là que nous pouvons voir apparaître un motif sur le réseau. Celui formé par l'espèce  $u$  est représenté à la Figure 2.7. Lorsque  $d = 1.5$ , les concentrations après intégration sont identiques sur tous les noeuds et valent 1, tandis que lorsque  $d = 7.5$ , les concentrations varient entre environ 1.7 et 2.7. Remarquons également que lorsque le rapport  $d$  augmente,  $u(t)$  peut prendre des valeurs de plus en plus éloignées de sa position d'équilibre, en témoigne la Figure 2.8.

### Impact des paramètres de génération du graphe

Le degré moyen du graphe généré ainsi que la probabilité de recâblage ont une importance cruciale dans l'apparition d'instabilité. En effet, ce sont ces valeurs qui déterminent la

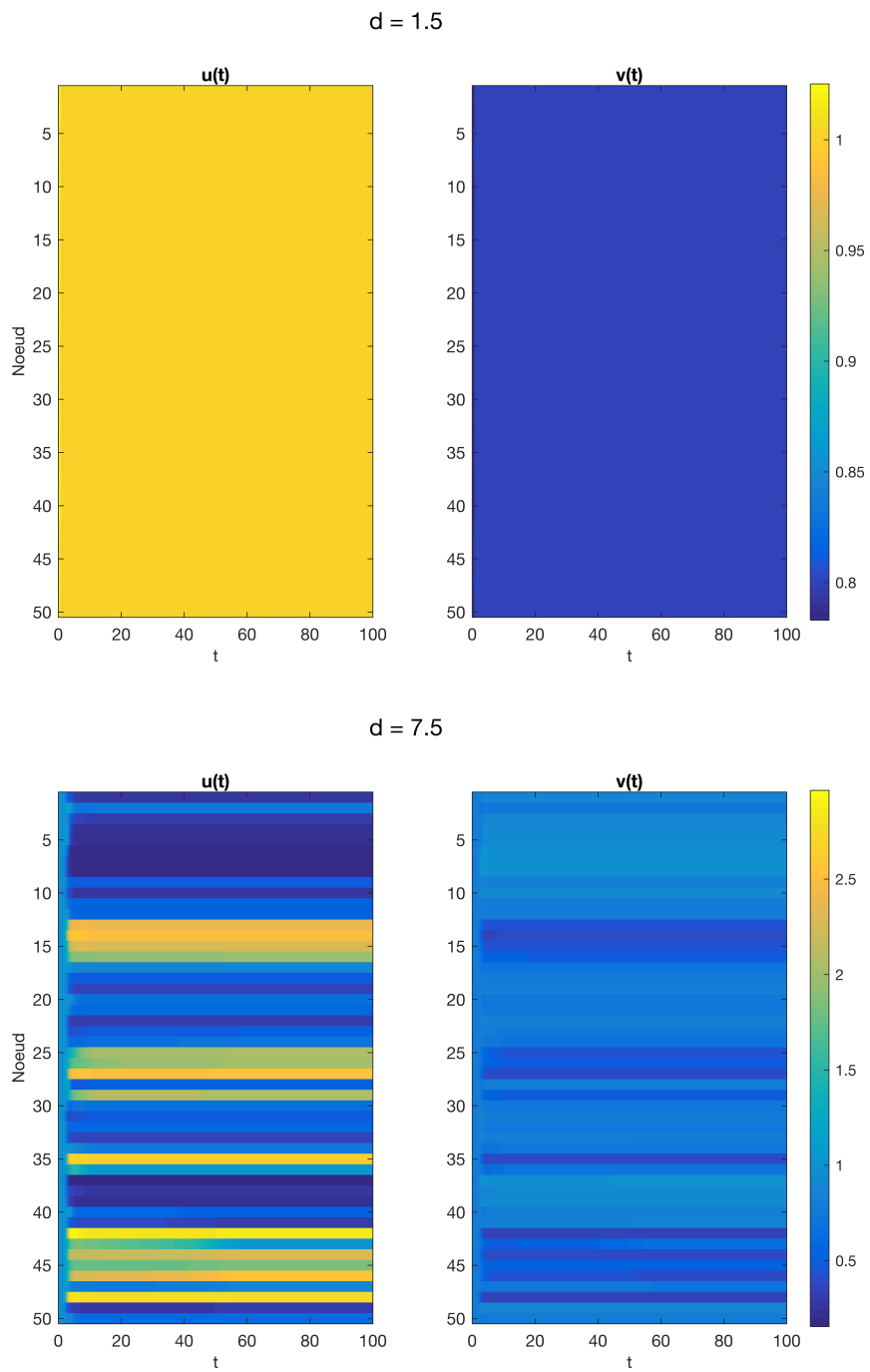


FIGURE 2.6 – Concentration des espèces en chaque noeud au fil du temps.



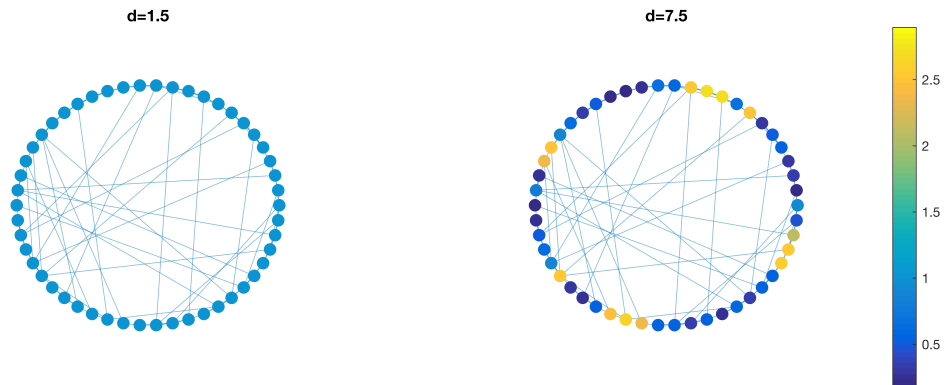


FIGURE 2.7 – Etat du réseau après intégration

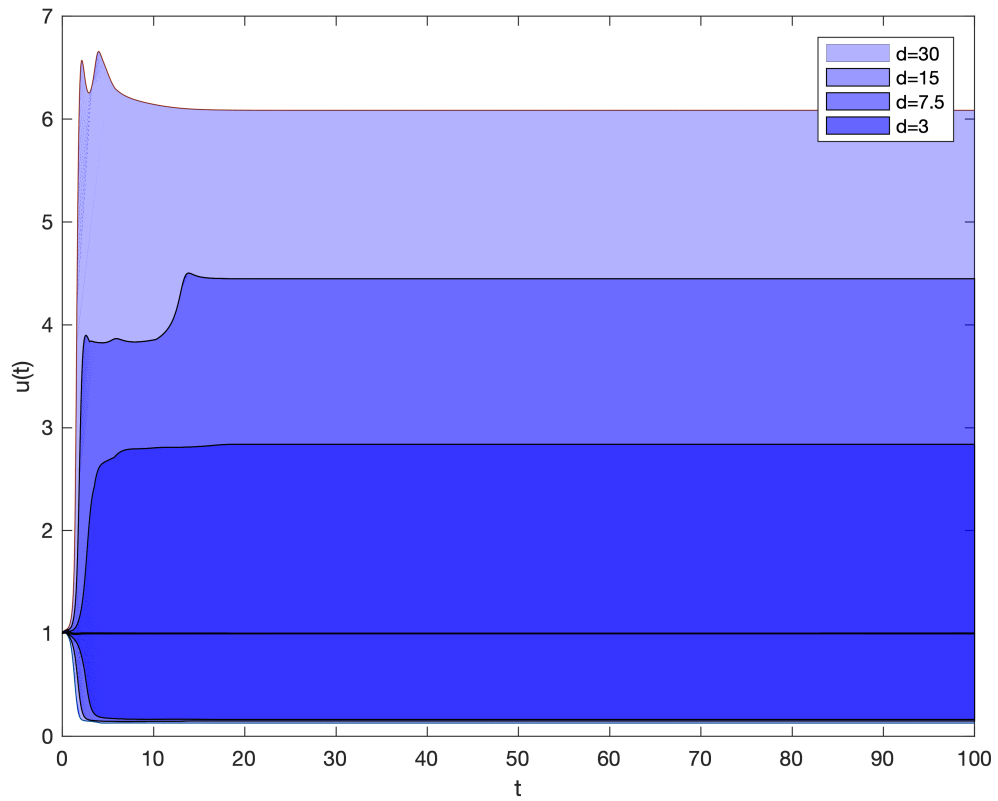


FIGURE 2.8 – Valeurs minimale et maximale de  $u(t)$  au fil du temps en fonction de  $d$ .

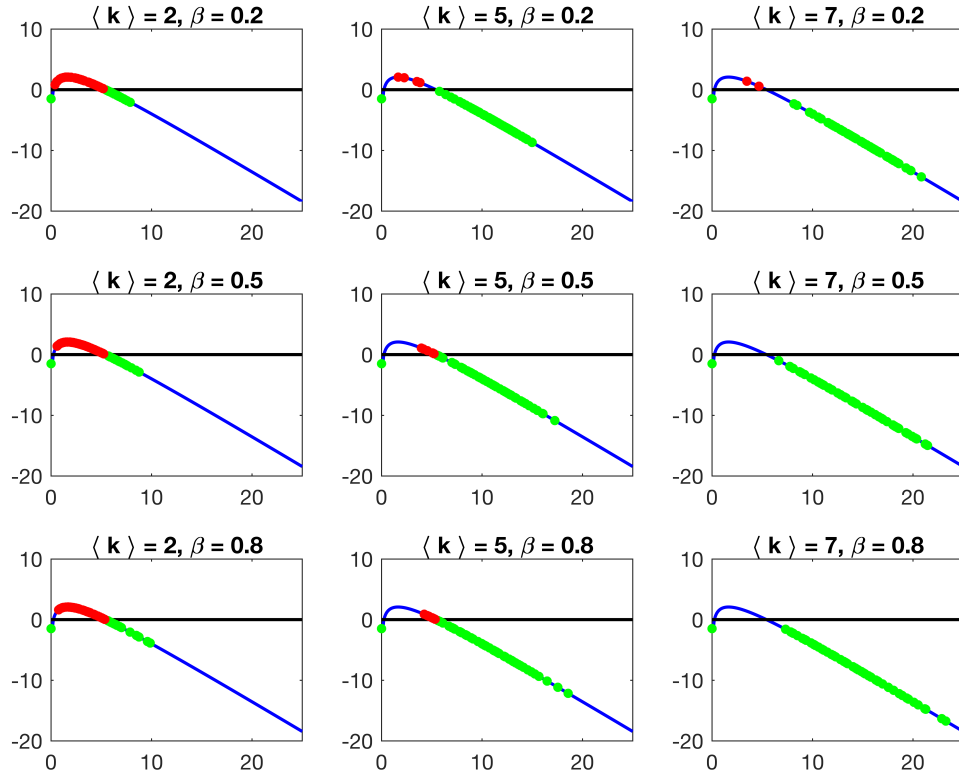


FIGURE 2.9 – Influence des différents paramètres sur la répartition des modes. En rouge, les modes instables ; en vert, les modes stables.  $N = 50$ .

matrice  $L$  et par conséquent, la distribution de ses valeurs propres. Il est possible que, pour certaines valeurs de ces deux paramètres, la courbe continue de la dispersion de  $\lambda$  admette des valeurs positives, sans pour autant que ces valeurs ne soient effectivement atteintes pour une ou plusieurs valeurs de  $\kappa$ . Une représentation des courbes obtenues lorsque l'on travaille sur des graphes générés différentes valeurs de  $K$  et  $\beta$  pour  $N = 50$ , se trouve à la Figure 2.9. Nous remarquons que plus les paramètres  $K$  et  $\beta$  augmentent, plus les valeurs propres de  $L$  ont tendance à "s'étaler". C'est pourquoi, lorsque ces deux paramètres ont des valeurs élevées, il est possible qu'aucun mode ne soit instable et donc qu'aucune instabilité n'apparaisse.

## 2.5 Diffusion croisée

Nous connaissons désormais les conditions sous lesquelles des instabilités de Turing, induites par l'introduction d'une diffusion simple, peuvent apparaître. Nous allons maintenant nous intéresser au cas où cette diffusion n'est plus simple, c'est-à-dire que la matrice  $D$  possède des éléments non nuls hors diagonale. Le système de deux espèces est donné par

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= f(u_i, v_i) + D_{uu} \sum_j L_{ij} u_j + D_{uv} \sum_j L_{ij} v_j, \\ \dot{v}_i &= g(u_i, v_i) + D_{vu} \sum_j L_{ij} u_j + D_{vv} \sum_j L_{ij} v_j, \end{aligned}$$

et la matrice  $D$  est donc

$$D = \begin{pmatrix} D_{uu} & D_{uv} \\ D_{vu} & D_{vv} \end{pmatrix},$$

où  $D_{(uv)}$  est la constante de diffusion de l'espèce  $u$  par rapport à l'espèce  $v$ . Par un calcul analogue à celui de la section précédente, et en considérant cette fois les termes non-diagonaux de  $D$ , nous pouvons calculer analytiquement le spectre de la Jacobienne du système. Soit  $\kappa$  une valeur propre de la matrice Laplacienne  $L$  du réseau, nous avons calculons les valeurs propres de  $P + \kappa D$  :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_u + \kappa D_{uu} - \lambda_\kappa & f_v + \kappa D_{uv} \\ g_u + \kappa D_{vu} & g_v + \kappa D_{vv} - \lambda_\kappa \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda_\kappa^2 - \lambda_\kappa (tr(P) + \kappa tr(D)) + |P| & \\ + \kappa (f_u D_{vv} + g_v D_{uu} + f_v D_{vu} + g_u D_{uv}) + \kappa^2 |D| &= 0. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $P + \kappa C$  sont données par

$$\lambda_{1,2\kappa} = \frac{1}{2} \left( tr(P) + \kappa tr(D) \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

où

$$\Delta = (tr(P) + \kappa tr(D))^2 - 4 \left( |P| + \kappa (f_u D_{vv} + g_v D_{uu} + f_v D_{vu} + g_u D_{uv}) + \kappa^2 |D| \right).$$

### 2.5.1 Application à un exemple

Dans notre cas, il n'est pas possible de calculer un seuil critique à partir duquel survient l'instabilité, comme nous avons pu faire dans la section précédente, car celui-ci serait un nombre complexe. Nous allons plutôt observer le comportement du système pour certaines valeurs choisies de  $D_{uv}$  et  $D_{vu}$  lorsque  $D_{uu} = 1$  et que  $D_{vv} = d_c$ . De cette façon, nous pouvons voir dans quels cas le fait d'introduire une diffusion "croisée" déstabilise l'équilibre.

Les différents cas observés sont repris dans la Table 2.1.

$D_{vu} < -1.1$	$D_{vu} \in [-1.1, 0[$	$D_{vu} \geq 0$
Toutes les courbes continues se croisent au dessus de 0.	Toutes les courbes continues se croisent en dessous de 0.	Pas de croisement
$\Rightarrow$ le système est toujours instable, peu importe la valeur de $D_{uv}$ .	$\Rightarrow$ il est possible d'avoir la stabilité ou l'instabilité en fonction de la valeur de $D_{uv}$ .	$\Rightarrow$ il est possible d'avoir la stabilité ou l'instabilité en fonction de la valeur de $D_{uv}$ .

TABLE 2.1 – Comportement de la dispersion de  $\lambda$  selon les valeurs de  $C$

Nous allons étudier un exemple de chaque cas.

### $D_{vu} < -1.1$

Fixons, par exemple,  $D_{vu} = -2$  et faisons varier  $D_{uv}$ . Les courbes obtenues se coupent toutes en un point situé au-dessus de 0, ce qui signifie que pour cette valeur de  $D_{vu}$ , le système ne sera jamais stable. Les courbes de dispersion ainsi que le réseau après intégration se trouvent à Figure 2.10 et nous observons bien l'instabilité lors de l'intégration. Le motif n'est pas très marqué, la plupart des noeuds restent à leur concentration initiale et seuls deux noeuds ont une grande concentration à la fin du processus.

### $D_{vu} \in [-1.1, 0[$

Dans le cas où  $D_{vu} \in [-1.1, 0[$ , il est possible d'avoir l'instabilité car les courbes continues de la dispersion de  $\lambda$  se coupent en un point sous 0. Nous fixons  $D_{vu} = -0.5$  et faisons varier  $D_{uv}$  afin d'obtenir les courbes de la Figure 2.11. Celles-ci ressemblent fortement au cas de la diffusion simple et l'état du réseau en fin d'intégration présente un état plutôt nuancé sans structure évidente.

### $D_{vu} \geq 0$

Dans ce dernier cas, nous fixons  $D_{vu} = 1$  et nous faisons varier  $D_{uv}$  afin d'obtenir les courbes de dispersion de la Figure 2.12. Nous remarquons que les courbes ne se coupent plus, ce qui signifie qu'il est possible d'avoir l'instabilité. Un exemple est également donné, sur lequel on observe un motif plus régulier que dans les cas précédents (petits groupes de noeuds abritant la même concentration). Notons que cet exemple est choisi car il fonctionne bien, mais il est également possible d'avoir des courbes qui restent croissantes. Dans ce cas, même si les valeurs  $\lambda_\kappa$  n'atteignent pas l'endroit où la courbe est positive, nous ne pouvons pas affirmer que nous gardons la stabilité dans tous les cas. En effet, cela dépend de la structure des graphes comme nous l'avons vu à la Figure 2.9. Un exemple de courbe de ce type se trouve à la Figure 2.13.

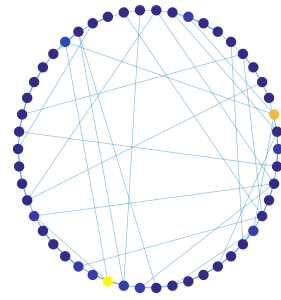
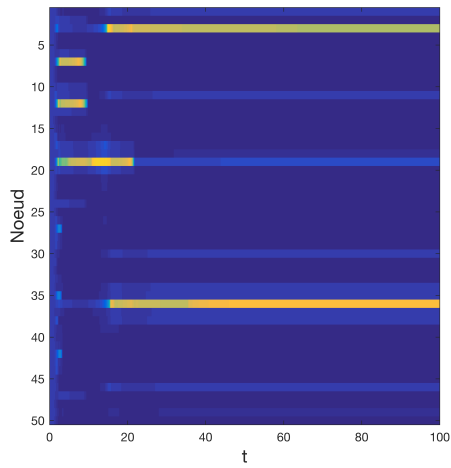
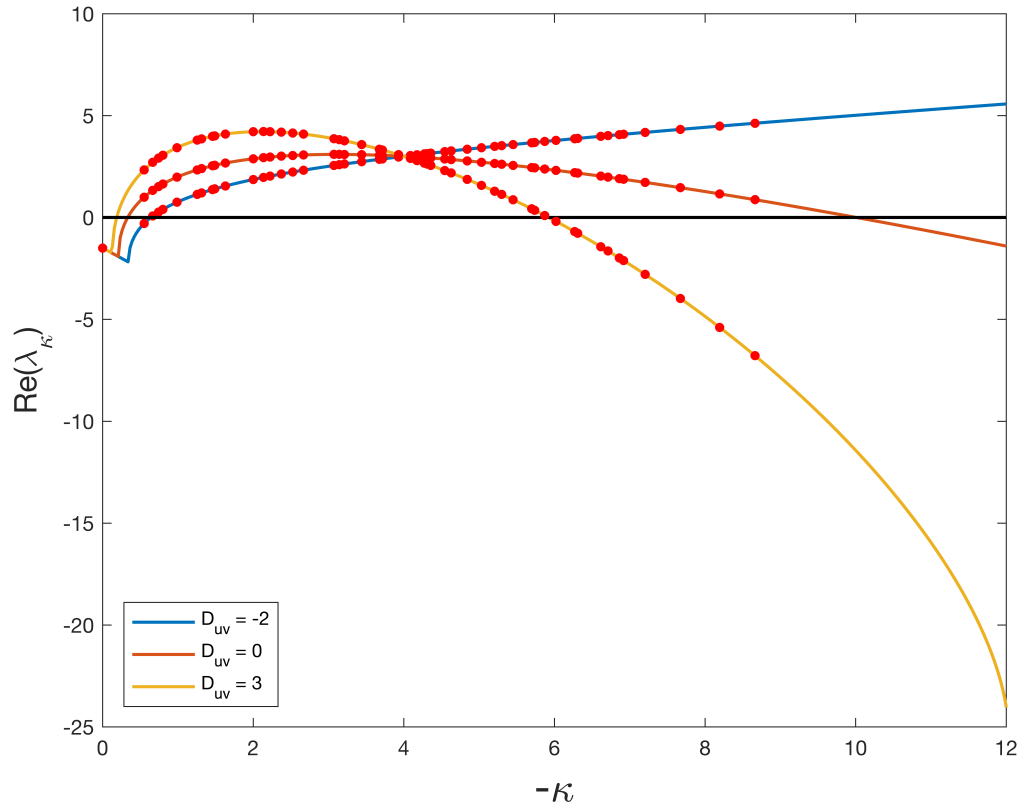


FIGURE 2.10 – Courbes de dispersion de  $\lambda$  ainsi que l'état du système lorsque  $D_{vu} = -2$  et  $D_{uv} = 3$ .

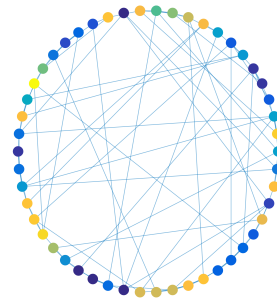
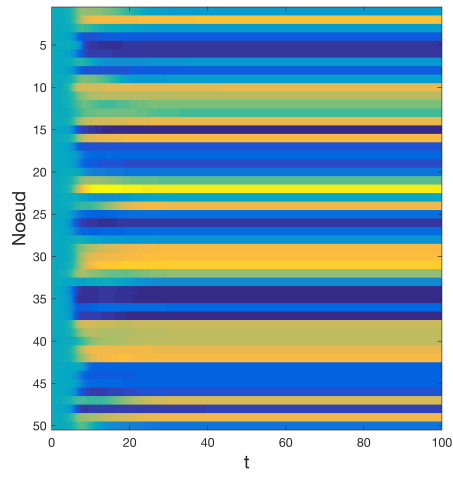
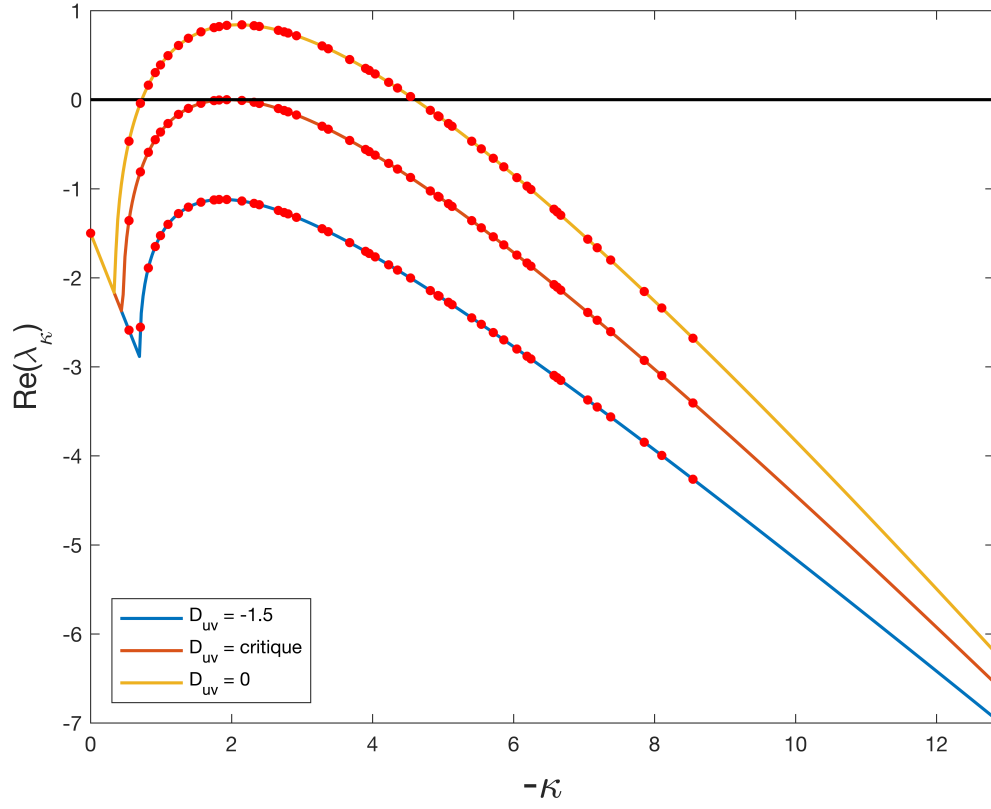


FIGURE 2.11 – Courbes de dispersion de  $\lambda$  ainsi que l'état du système lorsque  $D_{vu} = -0.5$  et  $D_{uv} = 0$ .

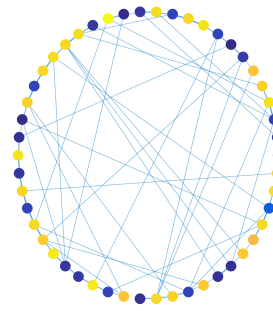
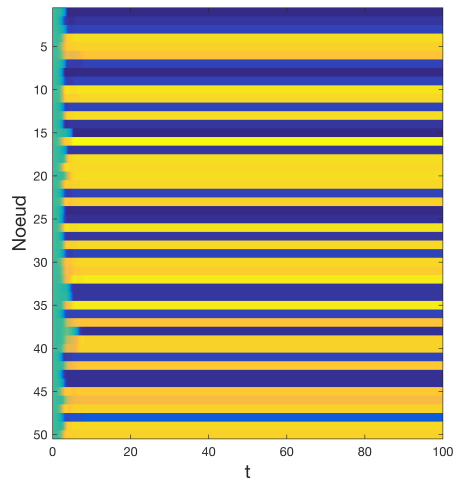
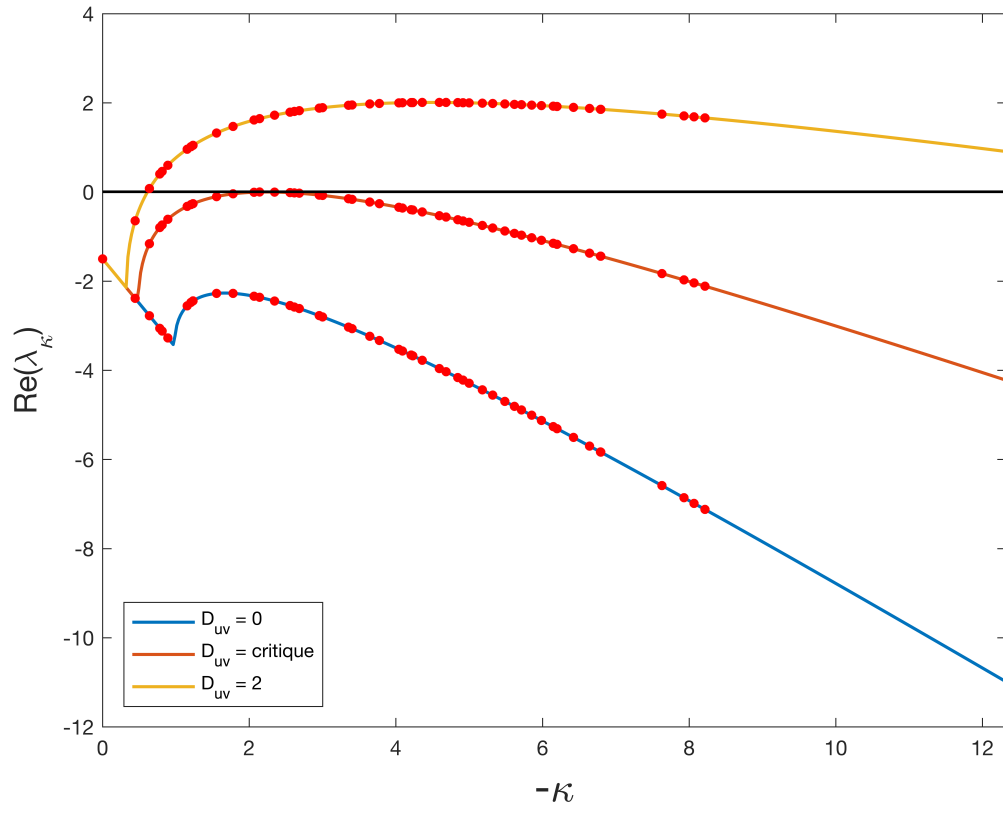


FIGURE 2.12 – Courbes de dispersion de  $\lambda$  ainsi que l'état du système lorsque  $D_{vu} = 1$  et  $D_{uv} = 2$ .

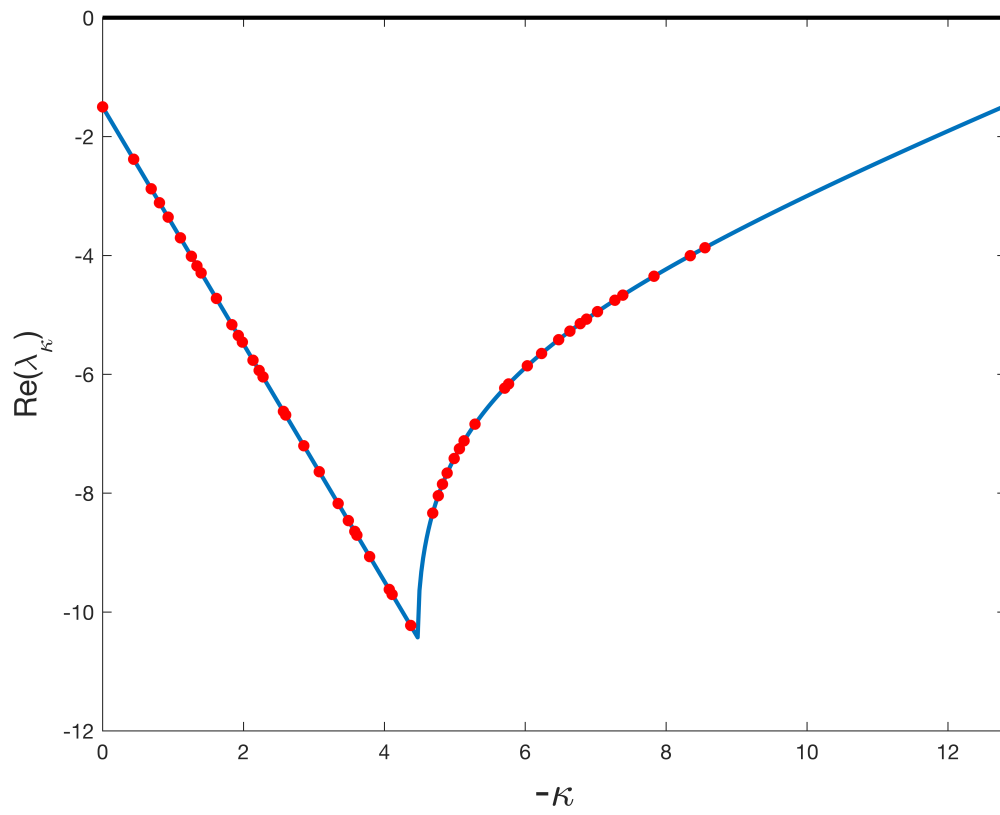


FIGURE 2.13 – Exemple de cas où la courbe continue croise la droite  $Re(\lambda_\kappa) = 0$  sans que les valeurs discrètes ne dépassent 0. Ici,  $D_{vu} = 5$  et  $D_{uv} = 1$ .





## Chapitre 3

# Diffusion dépendant des concentrations

### 3.1 Réécriture du système

Nous avons étudié les cas où les différentes concentrations sont des constantes. Nous nous intéressons désormais au cas où la diffusion dépend des concentrations en chaque noeud. Pour ce faire, nous introduisons la fonction  $\varphi_a(\vec{X}_i)$  qui caractérise la façon dont l'espèce  $a$  diffuse en fonction de toutes les espèces sur le noeud  $i$ . Le système s'écrit alors sous la forme

$$\dot{X}_{ia} = f_a(\vec{X}_i) + \sum_j L_{ij} \varphi_a(\vec{X}_j).$$

Différents choix sont possibles pour les fonctions  $\varphi_a$ .

- Si nous choisissons  $\frac{\partial \varphi_a}{\partial X_b} < 0$ , cela signifie que l'espèce  $X_a$  évite l'espèce  $X_b$  (comportement antisocial).
- Si nous choisissons  $\frac{\partial \varphi_a}{\partial X_b} > 0$ , cela signifie que l'espèce  $X_a$  suit l'espèce  $X_b$  (comportement social).

Tout comme dans les chapitres précédents, nous procédons à la linéarisation du système afin d'en étudier l'équilibre. Soit le point fixe caractérisé par

$$\forall i, X_{ia}^* = X_a^* \text{ tel que } f_a(X_i^*) = 0.$$

Ce point fixe est bien un point fixe de tout le système ( $\dot{X}_{ia} = 0$ ), car, si l'on note  $\vec{X}_i^* = (X_{i1}^*, \dots, X_{iM}^*)$ , ces vecteurs ayant tous les mêmes valeurs  $\forall i$ , nous pouvons les noter  $\vec{X}^*$ . Nous

avons donc bien que

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{ia} \Big|_* &= f_a(\vec{X}^*) + \sum_j L_{ij} \varphi_a(\vec{X}^*) \\
&= f_a(\vec{X}^*) + \sum_j (A_{ij} - k_i \delta_{ij}) \varphi_a(\vec{X}^*) \\
&= f_a(\vec{X}^*) + \sum_j A_{ij} \varphi_a(\vec{X}^*) - \sum_j A_{ij} \varphi_a(\vec{X}^*) \delta_{ij} \\
&= \underbrace{f_a(\vec{X}^*)}_{=0} + \sum_j A_{ij} \underbrace{(\varphi_a(\vec{X}^*) - \varphi_a(\vec{X}^*))}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous dérivons les termes de réaction et de diffusion par rapport aux concentrations comme dans les chapitres précédents. Pour la réaction, le développement est identique :

$$\left. \frac{\partial f_a(\vec{X}_i)}{\partial X_{jb}} \right|_* = \delta_{ij} \frac{\partial f_a}{\partial X_b}(\vec{X}_i^*) := P_{ab}.$$

Pour la diffusion,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X_{jb}} \sum_k L_{ik} \varphi_a(\vec{X}_k) &= \delta_{jk} L_{ik} \frac{\partial \varphi_a}{\partial X_{jb}}(\vec{X}_k) \\
&= L_{ij} \frac{\partial \varphi_a}{\partial X_{jb}}(\vec{X}_j) \\
&\equiv C_{ab} L_{ij}.
\end{aligned}$$

La Jacobienne du système général est alors donnée, comme dans le chapitre précédent, par

$$J = \mathbb{1}_N \otimes P + L \otimes C$$

et son spectre se calcule comme

$$sp(J) = \bigcup_{\kappa \in sp(L)} sp(P + \kappa C).$$

### 3.2 Application à un exemple

Nous appliquons cette idée à notre exemple du Brusselator. Pour rappel, le système sans diffusion est donné par

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v) = 1 - (b+1)u + cu^2v \\ \dot{v} = g(u, v) = bu - cu^2v, \end{cases}$$

ce qui signifie que  $f_u, f_v > 0$  et  $g_u, g_v < 0$ . Nous pouvons représenter ces relations sur un schéma, sous forme d'un graphe dont les noeuds sont les deux espèces  $u$  et  $v$  et les relations entre elles sont données par

- $A \rightarrow B$  : lorsque l'espèce  $A$  croît, alors l'espèce  $B$  croît aussi.
- $A \rightarrow B$  : lorsque l'espèce  $A$  croît, alors l'espèce  $B$  décroît.

sur la Figure 3.1. Voyons ce qu'il se passe si nous introduisons des fonctions de dispersion dépendant des concentrations en chaque noeud. Nous pouvons écrire ces fonctions sous la forme suivante

$$\begin{cases} \varphi_u(u, v) = \exp(c_{11}u) + \exp(c_{12}v) \\ \varphi_v(u, v) = \exp(c_{21}u) + \exp(c_{22}v), \end{cases}$$

de sorte que

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_u}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_u}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_v}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\exp(c_{11}u) & c_{12}\exp(c_{12}v) \\ c_{21}\exp(c_{21}u) & c_{22}\exp(c_{22}v) \end{pmatrix}.$$

De cette façon, en choisissant différentes valeurs pour  $c_{11}, \dots, c_{22}$ , nous pouvons modéliser des comportements social ou antisocial.

### Comportement social

Pour modéliser un comportement social, nous devons fixer les paramètres  $c_{ij}$  sur des valeurs positives. Puisque nous nous intéressons au système avec instabilité, nous choisissons des paramètres qui rendent ces instabilités possibles, c'est-à-dire qui rendent les valeurs propres de  $(P + \kappa C)$  positives pour au moins une valeur  $\kappa$ . Par exemple, si nous choisissons  $c_{11} = 1, c_{12} = 1, c_{21} = 1$  et  $c_{22} = 3$ , le spectre de  $(P + \kappa C)$  admet des valeurs positives (Figure 3.2a). Les concentrations au fil du temps sont à la Figure 3.2b. Nous remarquons que, dans le cas d'un comportement social, les espèces ont tendance à se diriger vers les noeuds où il y a plus d'individus, toutes espèces confondues. C'est pourquoi, nous représentons en Figure 3.2c, la concentration totale en individus. Le réseau est divisé en différentes zones de haute concentration et de basse concentration. À titre complémentaire, nous représentons également à la Figure 3.2d les noeuds pour lesquels la concentration de  $u$  est plus élevée que la concentration de  $v$ . Les zones de hautes concentration correspondent à celles où l'espèce  $u$

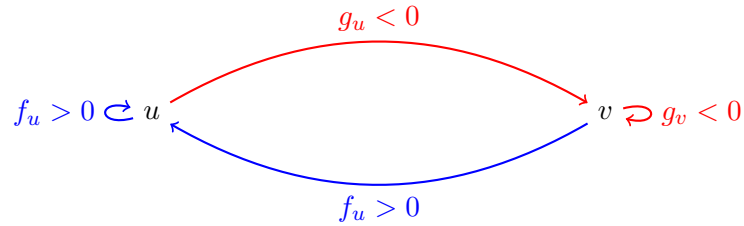
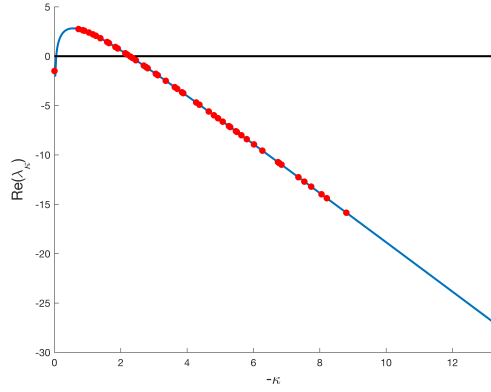
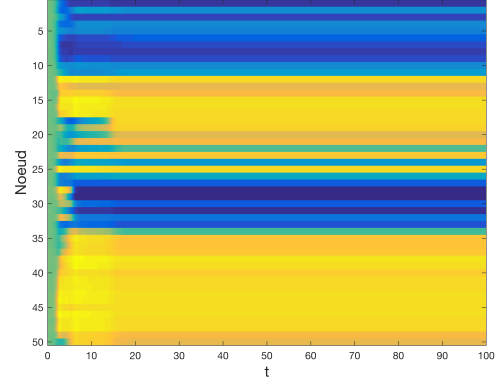


FIGURE 3.1 – Représentation du système Brusselator.

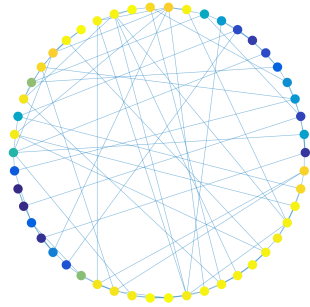
se trouve en plus grande quantité que l'espèce  $v$ . Cela semble logique car nous sommes dans le cadre d'une diffusion favorisant la sociabilité, les espèces vont donc naturellement se diriger vers les noeuds qui abritent déjà une grande concentration d'individus.



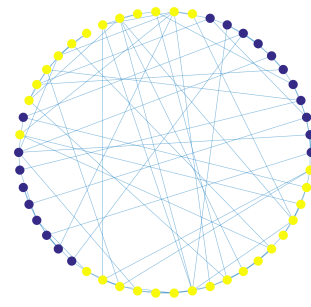
(a) Valeur de  $\lambda_\kappa$  en fonction de  $\kappa$ . Le trait continu représente la relation continue et les points rouges représentent la relation discrète.



(b) Concentration de  $u$  en chaque noeud au fil du temps et état du réseau après intégration.



(c) État du réseau après intégration. Les noeuds jaunes sont ceux où la quantité de  $u + v$  est la plus élevée.



(d) État du réseau après intégration. Les noeuds jaunes sont ceux où la concentration de  $u$  est plus élevée que celle de  $v$ .

FIGURE 3.2 – Résultats d'un comportement social.

### Comportement antisocial

Choisissons maintenant un comportement antisocial, qui modélise le fait d'une espèce s'éloigne automatiquement de l'autre espèce. Pour ce faire, nous fixons les paramètres  $c_{11} = 1$ ,  $c_{12} = -0.1$ ,  $c_{21} = -1$  et  $c_{22} = d_c$  comme calculé dans la section 2.4.1. Les valeurs de  $c_{11}$  et  $c_{22}$  sont laissées positives, considérant que les individus d'une même espèce ne s'évitent pas. La répartition des  $\lambda_\kappa$  se trouve à la Figure 3.3. Les concentrations de  $u$  en chaque noeud au fil du temps se trouvent à la Figure 3.4, ainsi que l'état du réseau à la fin de l'intégration. Ici, nous ne représentons que les zones où l'espèce  $u$  a une concentration supérieure à celle de  $v$ . Cela nous montre que le réseau est divisé en deux zones : d'une part, les individus de l'espèce  $u$  et d'autre part, les individus de l'espèce  $v$ . Cela est cohérent avec le fait que nous travaillons avec un comportement antisocial : les individus d'une espèce donnée ont tendance à éviter les individus de l'autre espèce et vice-versa, ce qui crée deux groupes distincts dans la répartition sur le réseau.

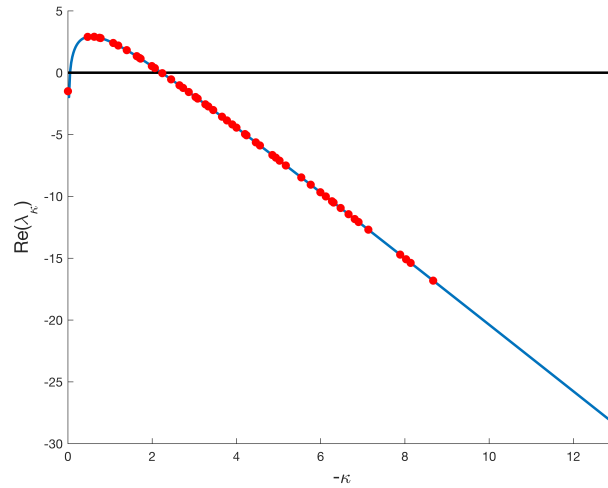


FIGURE 3.3 – Valeur de  $\lambda_\kappa$  en fonction de  $\kappa$ . Le trait continu représente la relation continue et les points rouges représentent la relation discrète.

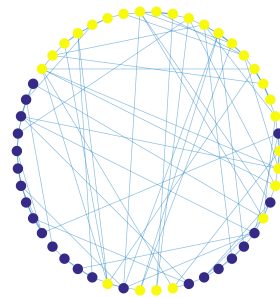
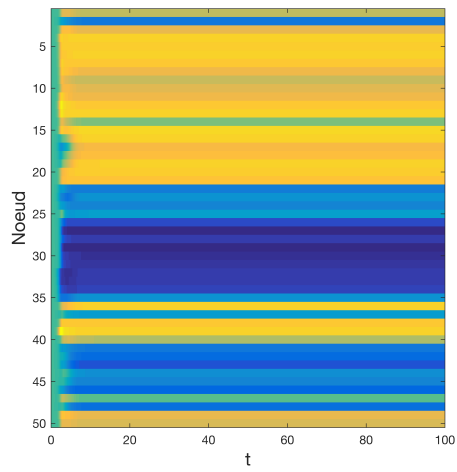


FIGURE 3.4 – Concentration de  $u$  en chaque noeud au fil du temps et état du réseau après intégration. Les noeuds jaunes sont ceux pour lesquels la concentration de  $u$  est supérieure à la concentration de  $v$ . Les noeuds bleus sont ceux où ce n'est pas le cas.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes posé la question de la formation de motifs sur le pelage des animaux. En partant de cette problématique, nous avons commencé par étudier la théorie relative à la formation de motifs en domaine continu. Nous avons défini les instabilités de Turing et déterminé des conditions sur les paramètres qui engendrent de telles instabilités. Ensuite, nous avons transposé cette théorie et ces résultats au cas des réseaux et nous avons procédé à des expérimentations.

Dans le premier chapitre, nous avons étudié la formation de motifs dans un modèle de réaction-diffusion, où la diffusion se fait en domaine continu. Nous avons effectué l'analyse de la stabilité du système de sorte à en retirer des conditions pour l'apparition d'instabilités de Turing. Ces instabilités surviennent lorsqu'un système possède un équilibre qui est stable pour la partie homogène, mais qui devient instable lorsque l'on ajoute des termes de diffusion.

Dans le deuxième chapitre, nous avons utilisé le développement du premier chapitre afin d'étudier des modèles de réaction-diffusion qui diffusent sur un réseau. Pour ce faire, nous avons commencé par mettre en place les outils de théorie des graphes nécessaires pour réécrire le système. Ensuite, nous avons effectué l'analyse de la stabilité du système afin d'en tirer des conditions d'apparition des instabilités de Turing lorsque la matrice reprenant les constantes de diffusion est diagonale. Nous avons également étudié le cas où cette matrice n'est pas diagonale. Enfin, avons testé ces résultats sur un exemple.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous nous sommes intéressés au cas où la diffusion des espèces sur le réseau peut dépendre des concentrations sur les noeuds. Pour ce faire, nous avons une nouvelle fois défini le modèle et étudié sa stabilité. Nous avons modélisé deux types de dynamiques de diffusion et les avons appliqués à un exemple.

Ce mémoire ne se veut pas exhaustif. D'autres thèmes, points de vue, dynamiques auraient pu être abordés. Nous avons décidé de nous concentrer très peu sur la diffusion en milieu continu pour nous intéresser plus rapidement aux réseaux. Le nombre d'espèces, la dynamique du système et le réseau sont autant de choix que nous avons faits et qui pourraient tout-à-fait



être remis en question. Par exemple, il aurait été possible d'étudier un système avec plus de deux espèces. De cette façon, la courbe de dispersion du spectre du système pourrait devenir plusieurs fois négative puis positive, comme dans l'article [5]. D'autres comportements plus complexes que le social et l'antisocial auraient également pu être abordés. D'autres types de réseaux (plus grands, présentant d'autres propriétés, composés de couches, ...) auraient pu être considérés, et bien d'autres choses encore. Le but de notre travail a principalement été de comprendre et reproduire des résultats déjà publiés. Comme dans toute discipline, scientifique ou non, la recherche ne s'arrête jamais. Chaque nouvelle découverte arrive avec son lot de questions dont les réponses à leur tour apporteront de nouvelles découvertes.

# Bibliographie

- [1] A.M. TURING, *The Chemical Basis of Morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641, pp. 37-72 (Aug. 14, 1952)
- [2] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, 3<sup>ème</sup> éd., Springer-Verlag, Berlin (2003)
- [3] CORNELL MAE, *MAE5790-6 Two dimensional nonlinear systems fixed points*, YouTube, <https://bit.ly/33tAZDc> (27 mai 2014)
- [4] S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Westview Press, sections 6.3, 6.4 (2000)
- [5] A. BRECHTEL, P. GRAMLICH, D. RITTERSKAMP, B. DROSSEL, T. GROSS, *Master stability functions reveal diffusion-driven pattern formation in networks*, arXiv :1610.07635v2 [physics.soc-ph] (2018)
- [6] R. LAMBIOTTE, L. TABOURIER, *Théorie des graphes*, UNamur, Namur (2013)
- [7] R. LAMBIOTTE, *Graph Mining*, UNamur, Namur (2018)
- [8] THE MATHWORKS, INC., MATLAB Release 2016b, Natick, Massachusetts, United States (2014)
- [9] THE MATHWORKS, INC., *Build Watts-Strogatz Small World Graph Model : Documentation (R2019a)*, consulté le 15 juin 2019 depuis <https://bit.ly/33q1d9H> (2015)
- [10] T. CARLETTI, *Équations différentielles ordinaires*, UNamur, Namur, chapitre VII (2013)
- [11] A. FUZFA, *Introduction aux algorithmes mathématiques et au calcul scientifique*, UNamur, Namur (2014)